Annales du CAPES externe de mathématiques 2012 à 2023

Regroupés par D.-J. Mercier

19 décembre 2023

megamathsblog.blogspot.com
archive.org/details/@agoraeus



EBE MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIEME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES
Section : LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : continuité uniforme

Étant donnée une fonction f de variable réelle définie sur un intervalle I d'intérieur non vide, on dit que f est uniformément continue sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall (x,y) \in I^2\,,\ \Big(|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
2. On rappelle qu'une fonction f est lipschitzienne de rapport k, où k est un réel strictement positif, si pour tout couple (x,y) d'éléments de I on a :

   $$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$$

   Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.
3.
   3.1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

   $$\Big||y|-|x|\Big| \leqslant |y-x|$$

   3.2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

   Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4.
   4.1. Montrer que pour tous réels positifs x et y on a :

   $$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad \text{et} \qquad \Big|\sqrt{x}-\sqrt{y}\Big| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

   4.2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

   4.3. Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.
5.
   5.1. En considérant les deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   5.2. La fonction h est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
6. Soit F un application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

   $$F(x) \leqslant ax+b$$

   6.1. Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \Big(|x-y| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |F(x)-F(y)| \leqslant 1\Big)$$

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

   6.2. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

6.3. Montrer que :

$$|F(x_0) - F(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| F\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - F\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$$

6.4. Conclure.

7.

7.1. Les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}$?

7.2. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

8. **Théorème de Heine**

Soit $I = [a; b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer le théorème de Heine[1] : *si une fonction G est continue sur I alors elle est uniformément continue sur I.*

On suppose dans la suite que G est une fonction continue sur $I = [a; b]$ et que G n'est pas uniformément continue sur I.

8.1. Justifier qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de I tels que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_n) - G(y_n)| > \varepsilon$$

8.2. Justifier qu'il existe deux sous-suites $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ et $(y_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ convergentes telles que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |G(x_{\sigma(n)}) - G(y_{\sigma(n)})| > \varepsilon$$

8.3. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\sigma(n)}$$

8.4. Conclure.

9. Soit J un intervalle d'intérieur non vide. Si une fonction G est uniformément continue sur tout intervalle $[a; b]$ inclus dans J, G est-elle nécessairement uniformément continue sur J ?

Problème 2 : marches aléatoires

Partie A : quelques résultats d'analyse

1. On considère la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1.1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

1.2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

puis que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

1. Eduard Heine (1821-1881), mathématicien allemand

2. On considère la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Montrer, à l'aide des outils de terminale scientifique, que la suite $(K_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on notera K la limite de cette suite (on ne demande pas de calculer K).

3. On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}$$

On admet la formule de Stirling [2] :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

4. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

5. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

6.
   6.1. Montrer que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

   6.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n(n+1)}}$$

7.
   7.1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{8n(n+1)\sqrt{\pi}}$$

   7.2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout entier $p \geqslant k$:

$$0 \leqslant a_p - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

   7.3. En déduire que, pour tout entier k non nul :

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a_k \leqslant \frac{1}{8k\sqrt{\pi}}$$

2. James Stirling (1692-1770) mathématicien écossais

Partie B : marche aléatoire sur une droite

Soit $(O; \vec{\imath})$ un axe gradué. Dans la suite du problème, tous les instants considérés sont des nombres entiers naturels.

Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ saute à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ ou sur le point d'abscisse $k-1$, avec la même probabilité.
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geqslant 1$).

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, montrer que :
   2.1. $P(O_{2k+1} = 1) = 0$;
   2.2. $P(O_{2k} = 1) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{a_k}{\sqrt{k}}$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(U_n)$ de la variable aléatoire U_n et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$E(U_n) = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$$
4. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C : marche aléatoire sur un plan

Un plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une particule située sur un point de coordonnées $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ saute à chaque instant sur l'un des points de coordonnées $(k+1, \ell+1)$, $(k+1, \ell-1)$, $(k-1, \ell+1)$ ou $(k-1, \ell-1)$ avec la même probabilité (c'est-à-dire qu'à chaque étape, la particule se déplace selon la diagonale d'un carré).
Chaque saut est indépendant du précédent.

La particule est à l'origine à l'instant $t = 0$.
On note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en O de la particule entre les instants 1 et $2n$ ($n \geqslant 1$).

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geqslant 1$, calculer $P(O_{2k+1} = 1)$ et $P(O_{2k} = 1)$.
3. Montrer que l'espérance de U_n est donnée par :
$$E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{k}$$
4. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$ on a :
$$\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4\pi k^2} \leqslant \frac{a_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{\pi k}$$
5. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 3 : équation de Pell-Fermat

On se propose de déterminer s'il existe des entiers strictement positifs m et n ($m < n$) vérifiant l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \sum_{k=m}^{n} k$$

1. Montrer que ce problème peut se ramener à la recherche d'entiers x, y, m et n ($0 < m < n$) tels que :

$$\begin{cases} x = 2n + 1 \\ y = 2m \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

On note dans ce qui suit (E) l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On range les solutions de (E) dans l'ordre croissant des y.

2. Écrire un algorithme permettant d'obtenir les solutions de (E) pour $y \leqslant 100$.
3. Déterminer la plus petite (au sens de l'ordre choisi) solution de (E).
4.
   4.1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier n non nul :
   $$(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$$
   4.2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
   4.3. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, (x_n, y_n) est solution de (E).

On se propose de montrer que l'ensemble $S = \{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation (E).

On suppose qu'il existe des couples (x, y) d'entiers positifs solutions de (E) n'appartenant pas à S et on note (X, Y) le plus petit (au sens de l'ordre choisi) de ces couples.

6. Montrer qu'il existe un unique entier N tel que $y_N < Y < y_{N+1}$.
7. Justifier à l'aide de l'algorithme que $N \geqslant 2$.
8. Montrer que :
$$x_N + y_N\sqrt{2} < X + Y\sqrt{2} < x_{N+1} + y_{N+1}\sqrt{2}$$
9. En déduire que :
$$x_{N-1} + y_{N-1}\sqrt{2} < (3X - 4Y) + (3Y - 2X)\sqrt{2} < x_N + y_N\sqrt{2}$$
10. Montrer que :
    10.1. $3X - 4Y > 0$;
    10.2. $3Y - 2X > 0$;
    10.3. $3Y - 2X < Y$;
    10.4. $(3X - 4Y, 3Y - 2X)$ est solution de (E).
11. Conclure.
12. Donner les cinq premiers couples d'entiers (x, y) (au sens de l'ordre choisi) solutions de (E) puis les valeurs correspondantes de m et n .



EBE MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Notations :

* Pour un ensemble fini F, on note $\text{card}(F)$ son cardinal.
* Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des éléments non inversibles.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, "a divise b" est noté $a|b$, ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = ka$.
* Pour a et $b \in \mathbb{Z}$, le plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$ de a et b est noté $a \wedge b$.
* Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\overline{a}$ la classe de a dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rappels : on considère $(G, .)$ un groupe fini d'élément neutre 1_G.

* Soit $a \in G$. On appelle ordre de a, que l'on note $\omega(a)$, le plus petit élément de l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, a^k = 1_G\right\}$.
  On a alors : $0 < \omega(a) \leqslant \text{card}(G)$ et $a^{\omega(a)} = 1_G$.
* Le groupe G est cyclique si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $\text{card}(G) = \omega(a)$.

Éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > 1$. Démontrer que $\overline{a}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Montrer que $(\mathcal{I}_n, \times)$ est un groupe commutatif.
3. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{10}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{10}, \times)$ est-il cyclique ?
4. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{12}$ avec leurs ordres. Ce groupe $(\mathcal{I}_{12}, \times)$ est-il cyclique ?
5. Pour les algorithmes demandés, on utilisera uniquement les opérations $\times, +, \wedge$ et la fonction de deux variables `reste` où `reste(a,b)` donne le reste de la division euclidienne de a par b pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

   On pourra également utiliser des boucles de type

   - `for`
   - `while`
   - et la construction `if...then...else...`.

   On précisera le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé.

   5.1. Écrire une procédure `Test( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant "1" si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et "0" sinon.

   5.2. Écrire une procédure `Card( )` ayant comme argument un entier n avec $n > 1$ affichant le cardinal de $\mathcal{I}_n$.

   5.3. Écrire une procédure `Ord( , )` ayant comme arguments deux entiers naturels k et n avec $n > 1$ affichant la valeur de $\omega\left(\overline{k}\right)$, l'ordre de $\overline{k}$ dans $(\mathcal{I}_n, \times)$, si $\overline{k} \in \mathcal{I}_n$ et `"Erreur"` sinon.

Éléments non inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que n est primaire lorsqu'il existe un nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p^\alpha$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et n ne soit pas primaire.

   6.1. Établir qu'il existe deux entiers, que l'on notera n_1 et n_2, tels que $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$ et $n_1 \wedge n_2 = 1$.

   On pourra utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

   6.2. Montrer alors que $(n_1 + n_2) \wedge n = 1$.

6.3. Établir également que : $\overline{n_1} \notin \mathcal{I}_n$ et $\overline{n_2} \notin \mathcal{I}_n$

7. On considère p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$. Prouver que : $\overline{k} \in \mathcal{N}_{p^\alpha} \Longleftrightarrow p|k$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$.
   Démontrer que $\mathcal{N}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si n est primaire.

Problème 2 : isométries du plan et de l'espace

On considère $E = \mathbb{R}^n$ (avec $n \in \{2, 3\}$) muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien.
Rappels et notations :

- Pour un ensemble fini F, on note card(F) son cardinal.
- E est muni canoniquement d'une structure affine.
- Une application affine de E est une application $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ vérifiant : pour tout $(A, B) \in E^2$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

  f étant donnée, l'application φ est unique, elle est appelée *partie linéaire* de f et on la note $\overrightarrow{f}$.
- Une isométrie de E est une application $f : E \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\text{pour tout } (A, B) \in E^2\,, \quad f(A)f(B) = AB$$

- Une isométrie de E est une application affine de E.
- Si f est une isométrie de E, on dit que f est un déplacement de E lorsque $\det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$.
- On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E, $Is^+(E)$ l'ensemble des déplacements et $Is^-(E) = Is(E) \setminus Is^+(E)$.
- L'image d'une droite (resp. d'un plan) de E par une isométrie de E est une droite (resp. un plan).
- Une isométrie de E est une bijection de E sur E.
- $(Is(E), \circ)$ est un groupe et $Is^+(E)$ est un sous-groupe de $(Is(E), \circ)$.
- Si $f \in Is^-(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^+(E)$.
- Si $f \in Is^+(E)$ et $g \in Is^-(E)$, alors $f \circ g \in Is^-(E)$.
- Pour une isométrie f de E, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ l'application identité de E, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et f^{-1} la bijection réciproque de f.
- On considère F une partie non vide de E. On note $G(F)$ (respectivement $G^+(F)$) l'ensemble des isométries (respectivement déplacements) de E laissant globalement invariant l'ensemble F.
  Ainsi pour tout $f \in Is(E)$ on a : $f \in G(F) \Longleftrightarrow f(F) = F$.
  De plus, on a : $G^+(F) = G(F) \cap Is^+(E)$.
  On définit enfin $G^-(F) = G(F) \setminus G^+(F)$.

Partie A : généralités

1. Soit $f \in Is(E)$.
   Établir que $f \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $\begin{cases} f(M) \in F \\ f^{-1}(M) \in F \end{cases}$.
2. Montrer que $G(F)$ et $G^+(F)$ sont des sous-groupes de $(Is(E), \circ)$.

3. Soit $s \in Is(E)$ telle que s soit une symétrie.
   Établir que $s \in G(F)$ si et seulement si pour tout $M \in F$, on a $s(M) \in F$.
   On rappelle qu'une symétrie σ de E est une application affine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
4. On suppose qu'il existe $\varphi \in G^-(F)$. On note $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} G^+(F) & \longrightarrow & G^-(F) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} \right.$.
   4.1. Justifier que Φ est une application bien définie.
   4.2. Montrer que Φ est une bijection.
5. Démontrer que si $G(F)$ est fini alors $\mathrm{card}\,(G(F)) = \mathrm{card}\,(G^+(F))$ ou $\mathrm{card}\,(G(F)) = 2\,\mathrm{card}\,(G^+(F))$.

Partie B : exemples dans le plan euclidien

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ orienté.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{P})$ est constitué des rotations et des translations et que les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des droites) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{P})$.

Un singleton
Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$.

1. On considère une application $f \in Is^-(\mathcal{P})$ telle que $f(\Omega) = \Omega$.
   1.1. Justifier qu'il existe $I \in \mathcal{P}$ tel que $f(I) \neq I$. On appelle r la réflexion ayant pour axe la médiatrice de $[I, f(I)]$.
   1.2. Montrer que $r(\Omega) = \Omega$ puis que $r \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.
   1.3. En déduire que f est une réflexion.
2. Démontrer que les éléments de $G(\{\Omega\})$ sont les rotations de centre Ω et les réflexions d'axe passant par Ω.

Une paire
On considère une paire de points du plan, $\mathcal{U} = \{P_1, P_2\}$ où $P_1 \neq P_2$.
On note I le milieu du segment $[P_1, P_2]$.

3. Soit $f \in G(\mathcal{U})$. Montrer que $f(I) = I$.
4. Soit $f \in G^+(\mathcal{U})$ tel que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Prouver que f est la symétrie centrale de centre I.
5. Montrer alors que $G(\mathcal{U})$ est formé de quatre éléments : $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, la symétrie centrale de centre I et deux réflexions.

Une ellipse
On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les axes de coordonnées sont notés : (Ox) et (Oy).
On considère l'ellipse Γ d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.
On note $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ les sommets principaux de l'ellipse Γ. On note s la symétrie centrale de centre O, r_1 la réflexion d'axe (Ox) et r_2 la réflexion d'axe (Oy), de sorte que, d'après de qui précède :

$$G(\{A, A'\}) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}, s, r_1, r_2\}$$

6. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Donner les coordonnées des points $s(M), r_1(M)$ et $r_2(M)$.
7. Montrer alors que $G(\{A, A'\}) \subset G(\Gamma)$.

On note $\Delta = \{M \in \mathcal{P} \,/\, OM \leqslant a\}$ le disque fermé de centre O et de rayon a et Λ le cercle de centre O et de rayon a.

8. Pour $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, représenter sur un même graphique l'ellipse Γ et le cercle Λ.
9. Établir que $\Gamma \subset \Delta$.
10. Montrer que $\Gamma \cap \Lambda = \{A, A'\}$.
11. Soient P et P' deux points de Γ.
    (a) Montrer que : $PP' \leqslant 2a$.
    (b) Établir de plus que : $PP' = 2a \Longleftrightarrow \{P, P'\} = \{A, A'\}$.
12. En déduire que : $G(\Gamma) = G(\{A, A'\})$.

Partie C : étude d'isométries de l'espace

Pour la fin du problème, on se place dans le cas où $n = 3$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct : $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les axes de coordonnées sont notés $(Ox), (Oy)$ et (Oz).
On rappelle qu'un automorphisme u de $\mathcal{E}$ est orthogonal si et seulement si pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathcal{E}$: $\|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathcal{E}$.
$O(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $\mathcal{E}$.
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_3 = A\,{}^tA$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.
L'ensemble des matrices orthogonales (resp. orthogonales de déterminant 1) est noté $O_3(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$).

1. Soit $f \in Is(\mathcal{E})$.
   1.1. Montrer que $\overrightarrow{f} \in O(\mathcal{E})$.
   On note alors A la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, X, X' et B les matrices colonnes respectives des coordonnées des points $M(x, y, z), M'(x', y', z')$ et $f(O)(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   1.2. Montrer que : $f(M) = M' \iff X' = AX + B$.
   (C'est l'expression analytique de f relativement au repère $\mathcal{R}$.)
   1.3. Montrer que : $A \in O_3(\mathbb{R})$ puis que : $f \in Is^+(\mathcal{E})$ si et seulement si $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ on considère les matrices carrées :

$$A_0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $A_i \in O_3(\mathbb{R})$.
3. Pour quelles valeurs de $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, a t-on $A_i \in SO_3(\mathbb{R})$?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice colonne $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et on définit les applications t_λ, v_λ, s et r de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ par leur expression analytique :

$$t_\lambda : X' = X + B_\lambda, \qquad v_\lambda : X' = A_1X + B_\lambda, \qquad s : X' = A_2X, \qquad r : X' = A_3X$$

De plus, on note $v = v_0$.
On rappelle que $Is^+(\mathcal{E})$ est constitué des translations, des rotations axiales et des vissages. Les réflexions de $\mathcal{E}$ (symétries orthogonales par rapport à un plan) sont des éléments de $Is^-(\mathcal{E})$.

4. Sans justification, donner la nature des transformations t_λ, v, s et r ainsi que leur(s) élément(s) caractéristique(s).
5. Montrer que $v_\lambda = v \circ t_\lambda = t_\lambda \circ v$ et reconnaître cette transformation en précisant ses éléments caractéristiques.
   On pourra utiliser un calcul matriciel.
6. Soient γ et $\delta \in \mathbb{R}$. Montrer que $v_\gamma \circ v_\delta = t_{\gamma+\delta}$ et que $t_\gamma \circ v_\delta = v_{\gamma+\delta}$.

Partie D : un cylindre à base elliptique

On considère deux réels strictement positifs a et b tels que $a > b$.
On considère le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

On considère Π le plan d'équation $z = 0$ et Γ l'intersection du cylindre $\mathcal{C}$ et du plan Π.

On remarque que la courbe Γ est l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ dans $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ repère orthonormé du plan Π.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la droite d_θ de $\mathcal{E}$ d'équations : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos(\theta) \\ y & = & b\sin(\theta) \end{array}\right.$.

On va montrer que les éléments de $G(\mathcal{C})$ peuvent s'écrire en composant certaines isométries de la partie précédente.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que t_λ, v_λ, s et r sont des éléments de $G(\mathcal{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{C} = \displaystyle\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} d_\theta$.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à d_0.
   - 3.1. Établir que $\mathcal{D}$ admet un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ tel que α et β ne sont pas simultanément nuls.
     On pourra commencer par donner un vecteur directeur de d_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
   - 3.2. On note $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathcal{D}$.
     Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ obtenue à l'aide de $\overrightarrow{u}$ et de M_0.
   - 3.3. Montrer alors que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en au plus deux points.
4. Soit $f \in G(\mathcal{C})$. Déduire de la question précédente que $f(d_0)$ est parallèle à la droite d_0.
5. Soit $f \in G(\mathcal{C})$. Montrer que $\overrightarrow{k}$ est un vecteur propre de $\overrightarrow{f}$.
6. Soit $\varphi \in O(\mathcal{E})$ admettant $\overrightarrow{k}$ comme vecteur propre.
   - 6.1. Établir que φ admet dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ une matrice de $O_3(\mathbb{R})$, donnée par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{M} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $M \in O_2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}$.
   - 6.2. Vérifier que $\varepsilon = \det(\varphi)\det(M)$.
7. Soit $f \in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O) \in \Pi$. On admet que $f(\Pi)=\Pi$.
   On peut donc définir $g : \left\{\begin{array}{ccc} \Pi & \longrightarrow & \Pi \\ M & \longmapsto & g(M)=f(M) \end{array}\right.$, application induite par f sur Π.
   - 7.1. Établir que g est une isométrie de Π vérifiant $g(\Gamma)=\Gamma$.
   - 7.2. À l'aide de la partie B, énoncer les quatre possibilités pour g puis en déduire que $f(O)=O$.
   - 7.3. Écrire les quatre possibilités pour la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
   - 7.4. Vérifier alors que l'on peut trouver i et $j \in \{0,1\}$ tels que $f = v^j \circ s^i$.
     On pourra utiliser l'expression analytique de f et la question 6.
8. Soit $f \in G^+(\mathcal{C})$ tel que $f(O) \notin \Pi$
   On note O' le projeté orthogonal de $f(O)$ sur le plan Π, t la translation de vecteur $\overrightarrow{f(O)O'}$ et $h = t \circ f$.
   - 8.1. Montrer que $h \in G^+(\mathcal{C})$ et $h(O) \in \Pi$.
     On pourra commencer par justifier que t peut s'écrire $t = t_\mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$ et utiliser la question 1.
   - 8.2. Montrer que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}^*$, i et $j \in \{0,1\}$ tels que $f = t_\lambda \circ v^j \circ s^i$.
9. Soit $f \in G^-(\mathcal{C})$.
   - 9.1. Établir que $r \circ f \in G^+(\mathcal{C})$.
   - 9.2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0,1\}$ tels que $f = r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i$.

Partie E : une hélice.

On reprend dans cette partie les notations de la partie précédente.

On considère l'arc paramétré $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & M(t)\,(a\cos(t), b\sin(t), t) \end{array} \right.$

On note $\mathcal{H}$ la trajectoire de cet arc paramétré.

1. Montrer que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$.
2. Soit $\mathcal{D}$ une droite telle que $\mathcal{D}$ coupe la courbe $\mathcal{H}$ en au moins trois points.
   Montrer alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} = d_\theta$.
   On pourra utiliser les questions 2. et 3. de la partie D.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $d_\theta \cap \mathcal{H} = \{M(\theta + 2k\pi) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Soient $f \in G(\mathcal{H})$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $f(d_\theta) = d_\omega$.
5. En déduire que $G(\mathcal{H}) \subset G(\mathcal{C})$.
6. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $t_{2k\pi} \in G(\mathcal{H})$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $t_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = 2k\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $t_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
8. Justifier brièvement que s et $v_{-\pi} \in G(\mathcal{H})$.
9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_\lambda \in G(\mathcal{H})$. Prouver qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (2k+1)\pi$.
   On pourra utiliser le fait que $v_\lambda\,(M(0)) \in \mathcal{H}$.
10. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Démontrer que :

$$f \in G^+(\mathcal{H}) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists i \in \{0,1\}\,,\ \left\{ \begin{array}{l} f = t_{2k\pi} \circ s^i \\ \quad\text{ou} \\ f = v_{(2k+1)\pi} \circ s^i \end{array} \right.$$

11. On veut montrer que $G(\mathcal{H}) = G^+(\mathcal{H})$.
    Pour cela, on suppose que $G(\mathcal{H}) \neq G^+(\mathcal{H})$.
    - 11.1. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, i et $j \in \{0,1\}$ tels que $r \circ t_\lambda \circ v^j \circ s^i \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.2. En déduire que l'on peut trouver un réel noté μ tel que $r \circ t_\mu \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.3. Calculer les coordonnées du point $r \circ t_\mu\,(M\,(0))$.
    - 11.4. En déduire que l'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $r \circ t_{2m\pi} \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.5. En déduire que $r \in G^-(\mathcal{H})$.
    - 11.6. Calculer les coordonnées du point $r\left(M\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
    - 11.7. Conclure.

Problème 1 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.

   Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

   4.1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < \mathrm{e} < v_q$$

   4.2. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \dfrac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.
Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

1.

   1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.

   1.2. Calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} \left|P_n(x)\right|$ en fonction de a, b et n.

   1.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n > 0$$

1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$.
En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

2.1. $0 \leqslant k \leqslant n-1$

2.2. $n \leqslant k \leqslant 2n$

2.3. $k \geqslant 2n+1$

Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geqslant 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.
Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

2. Soit $x \in \,]0,1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 1 + \mathrm{E}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \quad \text{où E désigne la fonction partie entière.}$$

2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

2.2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geqslant 2$.

2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geqslant 2$, $b_0 \geqslant 2$ et :

$$[a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

On pose $n_0 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \neq b_n\right\}$

3.1. Démontrer que $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$.

3.2. Démontrer que si $x = [\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots]$ alors $\alpha_0 x - 1 \leqslant x$ et en déduire que $\alpha_0 = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0,1]$.

4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :
   4.1. une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c $(c \geqslant 2)$.
   4.2. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n+2$.
   4.3. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = (2n+1)(2n+2)$.
5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\text{ch}(\sqrt{2})-2$.
6. Démontrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérès, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes , choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la "vraie position" et prédire ainsi le futur passage de Cérès. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, \dots, x_n)$, un n-uplet de réels.
On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$$

1. **Minimisation de G**
   1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
   1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?
2. **Minimisation de L**
   On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :
   $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$
   2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
   $n = 3$, $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$
   2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
   $n = 4$, $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$
   2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
   On distinguera les cas n pair et n impair.
   2.4. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.3 ?

Le 7 décembre 1801, Cérès sera observée à l'endroit prévu par les calculs de Gauss. Il prolongera ce travail en établissant, grâce à la théorie des probabilités, que la répartition des erreurs suit une loi normale.

Partie B : théorie de l'information, le cas discret

La théorie de l'information est un modèle mathématique créé par Claude Shannon en 1948, qui vise à quantifier mathématiquement la notion d'incertitude. Elle a depuis connu des développements aussi bien en statistique qu'en physique théorique ou en théorie du codage.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Étant donné un entier naturel non nul n, on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, ..., A_n\}$ de probabilités respectives $(p_1, ...p_n)$ toutes non nulles.
On définit l'**entropie** de ce système par le nombre :

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

1. **Deux exemples**

   On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : *Le cheval numéro i remporte la course*. Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système.

   1.1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

   1.2. $p_1 = \dfrac{1}{8}, p_2 = \dfrac{1}{8}, p_3 = \dfrac{1}{4}, p_4 = \dfrac{1}{2}$

   On va à présent établir la propriété générale suivante :

   l'entropie est maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée, c'est-à-dire lorsqu'il y a équiprobabilité.

2. **Cas** $n = 2$

   On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$.

   On pose $p_1 = p$ et $p_2 = 1 - p$.

   Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont équiprobables.

3. **Cas général**

   3.1. **Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen**

   Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si :

   $$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

   On considère une fonction f convexe sur I, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

   Démontrer que :

   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

   On pourra procéder par récurrence sur n, en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$ *:*

   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right)$$

3.2. On admet le théorème suivant :
si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0,1[$.

3.3. Démontrer que $H(A) \leqslant \ln n$. Conclure.

Partie C : théorie de l'information, le cas continu

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = 1$
Lorsqu'en plus $f \ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}x$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdent une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est-à-dire correspond à la quantité minimale d'information.

1. **Deux exemples**
   On admet que les deux fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.
   1.1. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$
   1.2. h définie par $h(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ si $t \geqslant 0$, $h(t) = 0$ sinon, où λ est un réel strictement positif.
2. **Deux résultats préliminaires**
   2.1. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :
   $$x \ln y \leqslant x \ln x + y - x \text{ et } x \ln y = x \ln x + y - x \Leftrightarrow x = y$$
   2.2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Démontrer que :
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0$$
   On pourra procéder par contraposition.
3. **Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance**
   On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathscr{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est-à-dire telles que :
   - $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle
   - $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.

   On appelle $\mathscr{N}$ cet ensemble.
   3.1. Démontrer que $g \in \mathscr{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1.1
   3.2. Soit f un élément de $\mathscr{N}$. Démontrer que :
   $$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(g(x))\,\mathrm{d}x = H(g)$$
   3.3. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que :
   - $H(f) \leqslant H(g)$
   - $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$

CAPES externe de Mathématiques

session 2013 (nov. 2012)

seconde composition

Enoncé

Visitez le site Megamaths : http ://megamaths.perso.neuf.fr/

[0] [ag89e] v1.00

PROBLEME 1 - PUISSANCES DE MATRICES

Rappels et notations

Étant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ est noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On identifiera par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier n, on note :

$$A_n = (a_{ij}(n))_{1\le i\le p, 1\le j\le q}.$$

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$, la suite $(a_{ij}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, en posant $\lim_{n\to+\infty}(a_{ij}(n)) = l_{ij}$ et $L = (l_{ij})_{1\le i\le p,\ 1\le j\le q}$, on dit que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n, on note A^n la puissance n-ième de la matrice A. Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

– Partie A – Étude d'un exemple

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{5}\,x_n + \dfrac{2}{5}\,y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{5}\,x_n + \dfrac{3}{5}\,y_n. \end{cases}$$

Dans cette partie, on pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de A^n et de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A puisse s'écrire $A = PDP^{-1}$ où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression deA^n en fonction de n.

4. Etablir que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

5. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.

– Partie B – Résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M.

   1.1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = L + M$.

   1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(\alpha\, A_n) = \alpha\, L$.

1.3. Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n B) = \alpha\, B$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L.

2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n X = LX$.

2.2. Énoncer sans démonstration un résultat analogue pour la multiplication à droite.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^p \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n X = 0.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$.

– Partie C – Condition nécessaire

Dans la suite du problème, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté par la matrice A dans la base canonique. Pour tout entier naturel n, on définit u^n par $u^0 = Id_{\mathbb{C}^p}$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$. On suppose dans cette partie que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Soit λ une valeur propre de u ($\lambda \in \mathbb{C}$).

1.1. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

1.2. On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer qu'alors $\lambda = 1$. *On pourra considérer* $\left|\lambda^{n+1} - \lambda^n\right|$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - Id) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id) = \{0\}$.

– Partie D – Condition suffisante

On note $\chi_u(X) = \det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de u, où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

2. En déduire que l'on peut écrire $\chi_u(X) = \det(A - XI_p) = \prod_{i=1}^{p}(\alpha_i - X)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

3. Justifier le fait que u admet dans une certaine base $(e_1, ..., e_p)$ une matrice T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

4. On suppose dans cette question que $|\alpha_i| < 1$ pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$.

4.1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u^n(e_1) = 0$.

4.2. Montrer par récurrence que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} u^n(e_i) = 0$.

4.3. En déduire la limite de T^n, puis celle de A^n.

5. On note λ_1, ..., λ_m les valeurs propres de u, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq m$. On suppose également que :

$$\mathrm{Ker}\,(u - Id) \cap \mathrm{Im}\,(u - Id) = \{0\}\,.$$

5.1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - Id)$ et $\mathrm{Im}\,(u - Id)$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}^p$ stables par u.

5.2. On note u_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(u - Id)$ induit par u. Montrer que toute valeur propre de u_1 est une valeur propre de u, distincte de λ_1.

5.3. En remarquant que u_1 vérifie les hypothèses de la question 4, en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

– Partie E – Conclusion et application

1. On note λ_1, ..., λ_m les valeurs propres de A, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,m]\!] \quad |\lambda_i| < 1 \\ \quad \text{ou} \\ \begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\} \\ \text{et } \forall i \in [\![2,m]\!] \quad |\lambda_i| < 1. \end{cases} \end{cases}$$

2. Déterminer si les suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, dans chacun des cas suivants :

2.1. $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & i/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + i/2 & 9 \\ 0 & -4 & 6 + i/2 \end{pmatrix}$.

PROBLEME 2 - QUELQUES THEOREMES D'ARITHMETIQUE

On démontre dans la partie A un théorème de Lagrange dont on utilise le résultat pour démontrer le théorème de Wilson (partie B) et le théorème de Wolstenholme (partie C).

– Partie A – Théorème de Lagrange

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

2. Montrer que pour tout entier premier p et tout entier $k \in [\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.

3. Soit p un entier premier impair. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x + k).$$

3.1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$pf(x) = (x+1)\,f(x+1) - xf(x).$$

3.2. Justifier l'existence d'un p-uplet d'entiers $(a_0, a_1, ..., a_{p-1})$ tel que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}.$$

3.3. Montrer que $a_0 = 1$ et $a_{p-1} = (p-1)!$.

3.4. À l'aide de la question 3.1 et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrer que pour tout entier $k \in [\![1, p-1]\!]$ on a :

$$pa_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{p-i}{k+1-i} a_i.$$

3.5. En déduire que $a_1 = \binom{p}{2}$ et que pour tout entier $k \in [\![2, p-1]\!]$ on a :

$$ka_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i.$$

3.6. En déduire le théorème de Lagrange : si p est un entier premier impair et si :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = \sum_{k=1}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$$

alors les coefficients a_1, a_2, ..., a_{p-2} sont divisibles par p.
On pourra raisonner par récurrence.

– Partie B – Théorème de Wilson

On se propose de démontrer la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Wilson » : si p est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 2$.

2. p est maintenant un entier premier impair.

2.1. Montrer que :

$$p! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!,$$

les entiers a_1, a_2, ..., a_{p-2} étant ceux définis à la question A.3.2.

2.2. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Montrer que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.

4. On se propose d'étudier ce que devient le théorème de Wilson pour les entiers non premiers strictement supérieurs à 4.

4.1. On suppose que $n > 4$ et que la décomposition en produit de facteurs premiers de n comprend au moins deux facteurs premiers distincts. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

4.2. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^\alpha$ où p est un entier premier et α est un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

4.3. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^2$ où p est un entier premier. Montrer que $1 < 2p < n$ et en déduire que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

– Partie C – Théorème de Wolstenholme

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le rationnel :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On désigne par s_n et t_n les deux entiers naturels tels que :

$$H_n = \frac{s_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}\,(s_n, t_n) = 1.$$

1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir pour n allant de 2 à 10 les entiers s_n et t_n (on supposera qu'on dispose d'une instruction pgcd(a, b) qui renvoie le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b).

2. Calculer s_4, s_6 et s_{10} et vérifier que ces entiers sont divisibles respectivement par 5^2, 7^2 et 11^2.

Dans la suite, p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3. On se propose de démontrer que l'entier s_{p-1} est divisible par p^2 (théorème de Wolstenholme).

3. Montrer que :

$$H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}$$

où a_{p-2} est défini comme à la partie A. *On pourra utiliser une relation liant les racines d'un polynôme et l'un de ses coefficients.*

4. Déduire de l'écriture de $f(-p)$ que :

$$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \ldots + a_{p-3} p.$$

5. Conclure.

Problème 1 : sommes de Riemann.

Dans ce problème, on suppose introduite à l'aide des fonctions en escalier la notion d'intégrale au sens de Riemann d'une fonction.

Partie A : convergence des sommes de Riemann

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on considère les sommes de Riemann :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Dans un premier temps, on se propose de démontrer que les suites $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans un deuxième temps, on cherche à obtenir une majoration de $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right|$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2. Soit ε un réel strictement positif.

   2.1. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

   2.2. En déduire que :

$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

   puis que :

$$\forall n \geq N, \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f)\right| \leq \varepsilon.$$

3. En déduire que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. *Application*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln 2$.

5. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

   5.1. Démontrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

   5.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall t \in [x_k, x_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$.

5.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

6. *Application : calcul d'une valeur approchée de* $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *par la méthode des rectangles.*

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$.

6.1. Déterminer un réel M tel que $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq M$.

6.2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les résultats obtenus dans la question 5, écrire un algorithme qui calcule une valeur approchée à ε près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Partie B : application à l'étude de suites

Soit f une fonction définie sur $]0, 1]$, continue et décroissante sur $]0, 1]$.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1]$, $I(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\lim_{x\to 0} I(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$. Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

4. Dans cette question, on pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, pour tout réel $x \in]0, 1]$.

4.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4.2. En utilisant les questions précédentes, démontrer que la suite $\left(\dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. *On rappelle que la fonction* $x \longmapsto x\ln x - x$ *est une primitive de la fonction* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C : une suite d'intégrales

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |sin(nx)| \, dx = \frac{2}{n}.$$

2. Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.

   2.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|sin(nx)| \, dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

   2.2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^\pi f(x)|sin(nx)| \, dx$.

   2.3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(x)|sin(nx)| \, dx$.

   2.4. Obtiendrait-on le même résultat pour une fonction f continue et décroissante sur $[0, \pi]$?

Partie D : une application aux probabilités

1. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), on pose $I_{k,m} = \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^m \, dx$.

   1.1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, I_{k,m} = \dfrac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}$.

   1.2. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), déterminer $I_{0,k+m}$ et en déduire une expression de $I_{k,m}$ en fonction des entiers k et m.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges dans cette urne est p. On réalise dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X, puis donner l'espérance de X.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
On dispose de N urnes U_1, ..., U_N contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j est $\dfrac{j}{N}$.
On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

   3.1. Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que X_N prenne la valeur k.
   Démontrer que : $p_N(k) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}$.

   3.2. Calculer l'espérance de X_N. Quelle est la limite de cette espérance quand N tend vers $+\infty$?

   3.3. En utilisant le résultat obtenu dans la première question, déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_N(k)$.
   Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$?

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.
Dans la partie A, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes sont supposées ne pas être connues.

Partie A : la fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle $(E) : y' = y$, avec la condition $y(0) = 1$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.
   1.1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.
   1.2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   1.3. Démontrer que si g est une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$, alors $g = f$.
   On pourra considérer la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
   1.4. Démontrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a + b) = f(a) \times f(b)$.
   On pourra fixer un réel a et considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a + x)}{f(a)}$.
   1.5. Déduire des résultats précédents que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$

   On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.
   2.1. Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définies pour $n > |x|$.
   2.2. Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$

   2.3. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.
      ii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.
      iii. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.
   2.4. Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.
   2.5. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
      i. Démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.
      ii. En déduire que : $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que : $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

2.6. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

2.7. On désigne par f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.

i. Démontrer que : $f(0) = 1$.
Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

ii. On admet que : $\forall\,(a, k) \in \mathbb{R}^2,\ f(a + k) - f(a) \geqslant k f(a)$.
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall\, h \in\,]-1, 1[,\ h\, f(x_0) \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \frac{h}{1-h} f(x_0)\,.$$

iii. En déduire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

Partie B : évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

– N est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

où r et K sont des constantes réelles strictement positives ;

– $N(0) = N_0$, avec $0 < N_0 < K$;

– N est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ;

– si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.

1. Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?

   On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

2. *Étude qualitative*

   2.1. Démontrer que N est strictement croissante sur I.

   2.2. En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

   2.3. Démontrer que $\ell = K$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3. *Détermination d'une expression de N*

   On pose, pour $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

   3.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E') : $y' = -ry + \dfrac{r}{K}$.

   3.2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

   3.3. Retrouver la limite de N en $+\infty$.

Problème 1 : matrices d'ordre fini.

Notations et définitions.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).
La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
      i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
   Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
   2.1. Démontrer que B est inversible.
   2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
   2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.
   2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.
   Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
   3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.
   3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.
   2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

   4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.
   Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

   4.3. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

   4.4. En déduire que $c = 0$.

   4.5. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.
6. On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.

   6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.
   On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

   6.2. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.
   On pourra considérer la trace de A.
2. Donner les valeurs possibles pour θ.
3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.

   4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.

   4.2. i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

   ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
   Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.

   iii. Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.

Problème 2 : décimales des nombres rationnels

Notations et définitions

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ désignent respectivement l'ensemble des nombres entiers naturels, celui des nombres entiers relatifs, celui des nombres décimaux et celui des nombres rationnels.
Un nombre réel x est dit *décimal* s'il existe un entier n tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.

On dit qu'une suite d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale si, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq d_n \leq 9$, le premier terme d_0 étant un entier naturel quelconque.
Une suite décimale est dite *finie* si tous ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.
Elle est dite :
– *impropre* si tous ses termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang ;
– *propre* dans le cas contraire du précédent.
On définit pour tout réel x la partie entière de x, notée $E(x)$, par la condition : $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés des nombres décimaux, puis d'étudier les décimales des nombres rationnels non décimaux.

Partie A : nombres décimaux

1. Démontrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et que ces inclusions sont strictes.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ est stable pour l'addition et la multiplication.
3. Soit x un nombre rationnel positif. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux et $b \neq 0$.
   3.1. On suppose qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, tels que $b = 2^\alpha \times 5^\beta$. Démontrer que x est décimal.
   3.2. On suppose que x est un décimal non entier.
   Démontrer que si p est un diviseur premier de b, alors $p \in \{2, 5\}$.
   3.3. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le rationnel x soit un nombre décimal.
4. On considère une suite décimale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   4.1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ est convergente. On note x sa limite.
   4.2. Démontrer que dans les deux cas suivants x est un nombre décimal :
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie ;
   – la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est impropre.
   4.3. Démontrer que pour tout entier $N \geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{1 + d_N}{10^N}$, avec égalité si et seulement si, pour tout $k \geq N + 1, d_k = 9$.
   4.4. En déduire que si x est un réel vérifiant $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ et si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre, alors la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette égalité est unique.

   Si $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$, avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décimale propre, on note alors $x = d_0, d_1 d_2 ... d_n ...$ et on dit que, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n-ième décimale du réel x.
5. Démontrer que pour tout nombre décimal positif x, il existe une unique suite décimale finie $(d_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{d_n}{10^n}$.

Parte B : périodicité des décimales d'un rationnel positif non décimal

Soit x un nombre rationnel positif **non décimal**. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels premiers entre eux.

On définit par récurrence deux suites d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- d_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b ;
- pour tout $n \geq 0$, d_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10\,r_n$ par b.

1. Soit N un entier tel que $N \geq 1$.
   1.1. Écrire un algorithme permettant d'afficher les entiers d_n et r_n de $n = 0$ jusqu'au rang N.
   On suppose disposer d'une instruction calculant la partie entière $E(y)$ d'un réel y.
   1.2. Donner pour le rationnel $x = \dfrac{5}{13}$ les valeurs de d_n et r_n jusqu'au rang $N = 7$.
2. 2.1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n : $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n\, b}$.
   2.2. En déduire que, pour tout entier n, r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b.
   2.3. Démontrer que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ et que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décimale propre.
3. Dans cette question, on va établir que les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont périodiques à partir d'un certain rang.
   3.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $r_n \neq 0$.
   3.2. Démontrer que les nombres $r_0, r_1, ..., r_{b-1}$ ne peuvent pas être deux à deux distincts.
   3.3. Soit q le plus petit indice d'un reste figurant au moins deux fois dans la liste de la question précédente et q' l'indice du premier autre reste qui lui est égal.
   On pose $p = q' - q$, de sorte que $0 \leq q < q + p \leq b - 1$ et $r_q = r_{q+p}$.
   Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang q et que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang $q + 1$.

   Dans la suite, on dit que q est la pré-période du rationnel x et p sa période.
   On note alors $x = d_0, d_1, ...d_q\,[d_{q+1}...d_{q+p}]$ si $q \geq 1$ et $x = d_0, [d_1...d_p]$ si $q = 0$.
4. On conserve dans cette question les notations précédentes.
   4.1. i. Démontrer que parmi les nombres $10^0, 10^1, ..., 10^{b-1}$, au moins deux d'entre eux sont congrus modulo b.
   ii. Démontrer que :
   - q est le plus petit exposant d'un nombre de la liste précédente qui est congru modulo b à un autre nombre de cette liste ;
   - $q + p$ est l'exposant du premier nombre de cette liste congru à 10^q modulo b et distinct de 10^q.

   4.2. Démontrer que le rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ a la même période et la même pré-période que $\dfrac{1}{b}$.

   Dans la suite, lorsque la fraction $\dfrac{1}{b}$ est non décimale, q et p seront nommés « la pré-période et la période de l'entier b ».
5. Déterminer la pré-période et la période des entiers suivants : $7; 12; 112$.

Partie C : détermination de la pré-période

On considère un entier b supérieur ou égal à 2 tel que la fraction $\frac{1}{b}$ soit non décimale et on note $\omega(b)$ sa pré-période et $\pi(b)$ sa période.

1. Dans cette question, on suppose que b est premier avec 10.
   1.1. Démontrer l'équivalence : $10^q \equiv 10^{q+p}$ modulo $b \Leftrightarrow 10^p \equiv 1$ modulo b.
   1.2. En déduire que $\omega(b) = 0$.
2. Dans cette question, on pose $b = 2^j \times 5^k \times c$, où c est un entier premier avec 10.
   Démontrer que $\pi(b) = \pi(c)$ et que $\omega(b) = \max(j, k)$.
   On pourra montrer que :
   $10^q\,(10^p - 1)$ *multiple de* $b \Leftrightarrow 10^q$ *multiple de* $2^j \times 5^k$ *et* $10^p - 1$ *multiple de* c.
3. Application : déterminer la période et la pré-période des nombres 150 et 1120.

Partie D : détermination de la période

Dans cette partie, on se propose de déterminer la période des entiers supérieurs ou égaux à 2, qui sont premiers avec 10, en fonction de leur décomposition en facteurs premiers. Si b est un tel entier, d'après la partie C, sa période $\pi(b)$ est le plus petit entier n non nul tel que $10^n \equiv 1$ modulo b.

1. Dans cette question, b est un nombre premier distinct de 2 et 5.
   1.1. On note $\overline{a}$ la classe d'un entier a dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ l'ensemble $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ privé de $\overline{0}$.
   Démontrer que l'application $f : \begin{cases} (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \to & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \\ \overline{a} \mapsto & \overline{10} \times \overline{a} \end{cases}$ est bien définie et injective.
   1.2. En utilisant la question précédente, démontrer que : $10^{b-1} \equiv 1$ modulo b.
   1.3. Démontrer que si r est le reste de la division euclidienne d'un entier n par un entier m, alors $10^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $10^n - 1$ par $10^m - 1$.
   On pourra utiliser une forme factorisée de $x^n - 1$*, où* x *désigne un réel quelconque.*
   1.4. Déduire des résultats précédents que :
   – si un entier k vérifie $10^k \equiv 1$ modulo b, alors $\pi(b)$ divise k ;
   – $\pi(b)$ divise $b - 1$.
2. Dans cette question, b et c sont deux entiers premiers avec 10 et premiers entre eux.
   2.1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $10^n \equiv 1$ modulo bc si et seulement si n est un multiple de $\pi(b)$ et de $\pi(c)$.
   2.2. En déduire que $\pi(bc) = \operatorname{ppcm}(\pi(b), \pi(c))$.
3. Dans cette question, b est un entier de la forme p^n, où p est un nombre premier distinct de 2 et 5, et n un entier naturel non nul. On pose $\pi(p) = \ell$.
   3.1. Justifier l'existence de deux entiers q et r tels que $r \geq 1$ et $10^\ell - 1 = p^r \times q$.
   3.2. *Premier cas* : $n \leq r$. Démontrer que $\pi\left(p^n\right) = \ell$.
   3.3. *Deuxième cas* : $n > r$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, il existe un entier naturel Q premier avec p tel que $10^{\ell \times p^k} - 1 = p^{r+k} \times Q$ et que $\pi\left(p^{r+k}\right) = \ell \times p^k$.
   En déduire que $\pi(p^n) = \ell \times p^{n-r}$.
4. *Applications*
   4.1. Déterminer la période des entiers $3, 3^2, 3^3, 3^4, 7, 7^2$ et 7^3.
   4.2. En déduire la période de l'entier 27783.

Problème 1 : applications du plan affine

Notations

– On désigne par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels.
– Soit un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Les coordonnées dans ce repère des points de $\mathscr{P}$ sont notées sous forme de matrices colonnes éléments de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On dira que f vérifie *la condition des droites* si :

1. f est bijective.
2. Pour toute droite D de $\mathscr{P}$, $f(D)$ est aussi une droite de $\mathscr{P}$.

Le but du problème est de trouver toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Partie A : conséquences de la condition des droites et exemples

1. Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.
   1.1. Soient M et N deux points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que l'image par f de la droite (MN) est la droite $(f(M)f(N))$.
   1.2. Soient D et D' deux droites distinctes de $\mathscr{P}$. Montrer que $f(D) \cap f(D') = f(D \cap D')$.
   1.3. Montrer que les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles si et seulement si les droites D et D' sont parallèles.
   1.4. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f(M)$, $f(N)$ et $f(P)$ sont alignés.
   1.5. Soient M, N, P et Q quatre points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme.
2. Soient $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application $f_{A,B}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $AX + B$.
   2.1. Montrer que $f_{A,B}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
   2.2. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f_{A,B}(M)$, $f_{A,B}(N)$ et $f_{A,B}(P)$ sont alignés.
   2.3. Montrer que $f_{A,B}$ vérifie la condition des droites.
3. Soient O', I', J' trois points non alignés de $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O) = O'$, $f_{A,B}(I) = I'$ et $f_{A,B}(J) = J'$.

Partie B : endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$

Soit ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour pour tous nombres réels x et y :

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y),\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \text{ et } \phi(1) = 1\,.$$

1. Montrer que $\phi(0) = 0$ et que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y)$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel non nul y, $\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\phi(n) = n$.
4. Montrer que pour tout nombre rationnel r, $\phi(r) = r$.
5. Soient a et b deux nombres réels, tels que $a \leqslant b$. Montrer que $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. On pourra utiliser l'égalité $b - a = (\sqrt{b-a})^2$.
6. Soit x un nombre réel et soit ε un nombre réel strictement positif.

6.1. Montrer l'existence de deux nombres rationnels x' et x'' tels que $x-\varepsilon \leqslant x' \leqslant x \leqslant x'' \leqslant x+\varepsilon$.

6.2. En déduire que $x-\varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant x+\varepsilon$.

6.3. En déduire que $\phi = Id_{\mathbb{R}}$.

Partie C : un cas particulier

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites et telle que $f(O) = O$, $f(I) = I$ et $f(J) = J$.

1. Justifier l'existence de deux applications ϕ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tous nombres réels x et y, les images par f des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\phi(0) = \psi(0) = 0$ et que $\phi(1) = \psi(1) = 1$.
3. 3.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   3.2. En déduire que pour tous nombres réels x et y, l'image par f du point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
4. 4.1. Soit x un nombre réel non nul. Soient A et B les points de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
   Montrer que $(f(A)f(B))$ est parallèle à (IJ).

   4.2. En déduire que pour tout nombre réel x, $\phi(x) = \psi(x)$.
5. 5.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   5.2. Montrer que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$.
6. 6.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$. Montrer que les droites (AC) et (IB) sont parallèles.

   6.2. Montrer que les droites $(f(A)f(C))$ et $(If(B))$ sont parallèles.

   6.3. En déduire que pour tous nombres réels x et y, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.
7. Montrer que $f = Id_{\mathscr{P}}$.

Partie D : cas général

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.

1. Montrer que $f(O)$, $f(I)$ et $f(J)$ ne sont pas alignés.
2. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O) = f(O)$, $f_{A,B}(I) = f(I)$ et $f_{A,B}(J) = f(J)$.
3. Montrer que $f_{A,B}^{-1} \circ f = Id_{\mathscr{P}}$.
4. Donner toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Problème 2 : équations différentielles

Après avoir étudié la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre particulières.

Notations et rappels

1. Pour une équation différentielle appelée E, on note :
   - EH l'équation homogène associée ;
   - $\mathrm{Sol}(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation E ;
   - $\mathrm{Sol}(EH)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EH.
2. On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles du second ordre, selon lequel :
   étant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, a, b et c des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction y, définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I qui vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases} .$$

Partie A : généralités

Soit E l'équation différentielle définie sur un intervalle I :

$$E: \; y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

où a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et y une application de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.
2. Soit t_0 un réel de l'intervalle I. On considère l'application φ_{t_0}, de $\mathrm{Sol}(EH)$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall y \in \mathrm{Sol}(EH), \quad \varphi_{t_0}(y) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} .$$

   Démontrer que φ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. En déduire que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.

4. *Expression des solutions de E.*
   Soit (y_1, y_2) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(EH)$ et p une solution particulière de E. Démontrer que les solutions de l'équation E sont les fonctions y qui s'écrivent sous la forme $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + p$, où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.
5. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation EH. On note w l'application définie sur I par :

$$t \mapsto w(t) = y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t) .$$

5.1. Démontrer que w est une fonction dérivable sur l'intervalle I et que w est solution sur I de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad w'(t) + a(t)w(t) = 0\,.$$

5.2. En déduire que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
- w est identiquement nulle, c'est-à-dire que $\forall t \in I, w(t) = 0$.
- w s'annule au moins une fois, c'est-à-dire que $\exists t_0 \in I, w(t_0) = 0$.

5.3. Dans cette question, on souhaite démontrer que si (y_1, y_2) est une base de $\mathrm{Sol}(EH)$, alors w ne s'annule pas sur I.
Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $w = 0$ et on considère $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) \neq 0$.
On définit la fonction z sur I par :

$$z : t \mapsto y_1(t_0)y_2(t) - y_2(t_0)y_1(t)\,.$$

Démontrer que z est solution de l'équation différentielle EH avec les conditions initiales $z(t_0) = 0$ et $z'(t_0) = 0$ et en déduire que la famille (y_1, y_2) est liée.
Conclure.

Partie B : solutions bornées d'une équation différentielle à coefficients constants

Soient b un réel et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$E : \quad y''(t) + by(t) = f(t)\,.$$

1. *Étude de l'équation homogène* EH : $y''(t) + by(t) = 0$

   1.1. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sol}(EH)$ suivant les valeurs de b.

   1.2. Déterminer les valeurs du réel b pour lesquelles toutes les fonctions de $\mathrm{Sol}(EH)$ sont bornées.

2. *Étude de l'équation avec second membre*
   On suppose dans cette question que $b = 1$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto g(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\,.$$

   Démontrer que g est une solution particulière de E et en déduire la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. *On pourra transformer l'expression* $\sin(x - t)$.

Partie C : étude de quelques propriétés des solutions d'une équation différentielle

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y''(t) + b(t)y(t) = 0$, où b désigne une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. On appelle zéro de la fonction y tout réel t tel que $y(t) = 0$. On souhaite démontrer que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $\mathbb{R}$, le nombre de zéros de y dans $[\alpha, \beta]$ est fini.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y qui possède un nombre infini de zéros dans $[\alpha, \beta]$.

   1.1. Démontrer qu'il existe dans $[\alpha, \beta]$ une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de y deux à deux distincts convergeant vers un réel $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

   1.2. Démontrer que $y(\gamma) = 0$.

1.3. Démontrer que, à partir d'un certain rang, le quotient $T_n = \dfrac{y(z_n) - y(\gamma)}{z_n - \gamma}$ est bien défini et que $y'(\gamma) = 0$.

1.4. En déduire que la solution y est nécessairement identiquement nulle et conclure.

1.5. En déduire que pour une solution y non identiquement nulle, on peut toujours trouver un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}$ dans lequel y ne s'annule pas.

2. On suppose dans cette question que b est une fonction strictement négative sur $\mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'une solution y non identiquement nulle ne peut avoir plus d'un zéro sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, on raisonne à nouveau par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y non identiquement nulle possédant au moins deux zéros.

2.1. *Un résultat préliminaire*
Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et f une fonction convexe deux fois dérivable sur $[\alpha, \beta]$, non identiquement nulle sur $[\alpha, \beta]$ et telle que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Démontrer que nécessairement $f < 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

2.2. Démontrer qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur lequel y est soit convexe, soit concave.

2.3. En déduire une contradiction et conclure.

Problème 1 : étude de points fixes

Dans ce problème, on étudie la méthode du point fixe, permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation.
Après avoir abordé les questions d'existence et d'unicité d'une solution, on construit des suites convergeant vers cette solution et on précise leur vitesse de convergence.

Définitions

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe pour f si $f(x) = x$.
- On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$.
- On dit que f est contractante sur I s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$, appelé coefficient de contraction, tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \gamma |x - y| .$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement, ou à une vitesse géométrique, vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}$, avec $0 < k < 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha| .$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 (ou a une convergence quadratique) vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|^2 .$$

On suppose connu le théorème des valeurs intermédiaires.

Partie A : quelques études d'existence et d'unicité

Dans cette partie, pour montrer qu'une hypothèse n'est pas nécessaire ou n'est pas suffisante, on pourra se contenter de fournir un contre-exemple graphique.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs reélles définie sur l'intervalle $I = [a, b]$.
   1.1. La continuité de la fonction f est-elle une condition nécessaire à l'existence d'un point fixe ?
   1.2. La continuité de la fonction f est-elle une condition suffisante à l'existence d'un point fixe ?
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $I = [0, 1]$. On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ telle que $f([a, b]) = [a, b]$.
   3.1. Démontrer que f possède un point fixe sur $[a, b]$.
   3.2. Dans cette question, on suppose de plus que f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?
   3.3. Dans cette question, on suppose maintenant que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?

Partie B : étude d'une suite convergeant vers un point fixe

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \alpha$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{\alpha}{t}\right)$.
   1.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Justifier l'équivalence : x_0 est un point fixe de g si et seulement si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
   1.2. Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$.
   Après avoir déterminé l'équation de la tangente T_t à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse t, démontrer que le réel $g(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
   1.3. En vue de la préparation d'une activité à présenter devant une classe de terminale scientifique, interpréter graphiquement le résultat précédent pour construire une suite convergeant vers la solution positive de l'équation $x^2 - \alpha = 0$.
2. On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\alpha}{u_n}\right).$$

   2.1. Démontrer que si $u_0 = \sqrt{\alpha}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et que si $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > \sqrt{\alpha}$. Dans la suite, on suppose $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$.
   2.2. En déduire que pour tout entier naturel n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(u_n, f(u_n))$ avec l'axe des abscisses.
   2.3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du deuxième terme.
   2.4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le réel $\sqrt{\alpha}$.
   2.5. Dans cette question, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le réel $\sqrt{\alpha}$ dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
   Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2.$$

   En déduire la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C : un théorème du point fixe

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a, b]$.
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :
$H1$: l'intervalle I est stable par f,
$H2$: f est contractante, de coefficient de contraction γ.

1. Démontrer que la fonction f étant contractante sur I, elle est nécessairement continue sur I.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   2.1. Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ?
   2.2. Démontrer que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j \, |u_1 - u_0|$$

   et en déduire que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leqslant \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |u_1 - u_0| \, .$$

   2.3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans I.
3. Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I.
4. Énoncer le théorème du point fixe ainsi démontré.
5. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème 2 : intégrale de Gauss et loi normale

La loi normale figure au programme de la classe terminale des différentes séries du lycée. Ce problème a pour objet d'établir plusieurs résultats essentiels pour l'étude de cette loi, dont certains dépassent ce niveau d'enseignement.
Les parties A et B visent à démontrer, grâce à l'étude d'une suite, la convergence de l'intégrale de Gauss.
La partie C consiste à justifier la validité de la définition de la loi normale et à calculer les principaux paramètres relatifs à cette loi.

Partie A : intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n\,.$$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$$1 \leqslant \frac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}\,.$$
4. Montrer que la suite $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer u_n pour tout entier naturel n.
6. Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,W_n^2$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,W_n$.

Partie B : calcul de l'intégrale de Gauss

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :
$$\ln(x+1) \leqslant x\,.$$
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\forall t \in \left[0,\sqrt{n}\right]\,,\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\,\cos(u)$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$
On pourra poser $t = \sqrt{n}\,\mathrm{cotan}(u)$.

5. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}\,.$$

6. Démontrer la convergence de l'intégrale de Gauss définie par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et déterminer sa valeur.

Partie C : loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Pour tout réel k, on considère la fonction φ_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_k(x) = k\, e^{-x^2/2}\,.$$

1. 1.1. Rappeler les conditions que doit vérifier une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour être une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
   1.2. Déterminer k pour que φ_k soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. On considère une variable aléatoire X ayant pour densité la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,.$$

   2.1. Démontrer que la variable aléatoire X a une espérance et déterminer sa valeur.
   2.2. Démontrer que la variable aléatoire X a une variance et déterminer sa valeur.

On dit qu'une variable aléatoire ayant pour densité la fonction φ suit la *loi normale centrée réduite.*

3. Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Soit Z une variable aléatoire telle que la variable $X = \dfrac{Z-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   3.1. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.
   3.2. Déterminer la densité de probabilité f de la variable aléatoire Z.

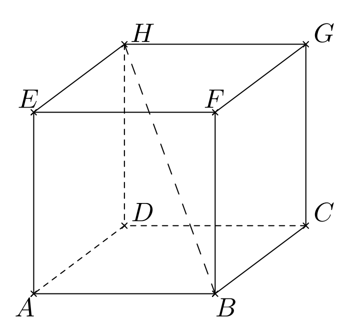
On dit alors que la variable Z suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$.
   4.1. Donner l'espérance de la variable aléatoire Y et démontrer que la variance de cette variable aléatoire vaut 2.
   4.2. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Cette variable aléatoire suit-elle une loi normale ?

Problème 3 : géométrie

Dans tout le problème ABC désigne un triangle non aplati.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.
2. Montrer que les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ne peuvent pas être perpendiculaires.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les hauteurs issues des sommets B et C soient perpendiculaires.
4. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
   4.1. Démontrer, avec les outils du collège, que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G situé au $\dfrac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.
   4.2. Démontrer que :
   $$c^2 + b^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(théorème de la médiane)}\,.$$
   4.3. En déduire que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si :
   $$c^2 + b^2 = 5a^2\,.$$
5. On considère un cube $ABCDEFGH$.



En utilisant le résultat de la question 4.3, expliquer comment, sur la figure précédente, on peut construire uniquement à l'aide de la règle le point A' projeté orthogonal du point A sur la droite (BH).

Problème n° 1

Notations

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

La partie réelle du nombre complexe z est notée $\operatorname{Re} z$.

Le module du nombre complexe z est noté $|z|$ et on rappelle que, pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z \times \overline{z}$.

Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers relatifs k tels que $p \leqslant k \leqslant q$.

Préambule

Ce problème est composé de trois parties.

La partie A généralise l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et son cas d'égalité.

La partie B est une application d'un résultat de la partie A à un problème d'optimisation.

La partie C est une application d'un résultat de la partie B à un problème de géométrie du triangle.

Partie A

On considère un entier naturel n non nul.

I. **1.** Justifier que, pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ et étudier le cas d'égalité.

2. **Question de cours.** — Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

3. On suppose z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en termes d'argument.

II. **1.** Démontrer que, pour tout n-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de nombres complexes,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2. Montrer que, si $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes tous non nuls, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad z_k = \lambda_k z_1.$$

Interpréter ce résultat en termes d'arguments.

Partie B

On se place désormais dans le plan complexe $\mathscr{P}$, d'origine O. Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tels que :

(i) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A_k est distinct de O.

(ii) Les A_k sont deux à deux distincts.

(iii) Il n'existe aucune droite du plan $\mathcal{P}$ contenant tous les A_k.

(iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

I. Donner un exemple de n-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vérifiant l'égalité précédente.

II. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $u_k = \frac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$ d'affixe z.

1. Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2. En déduire l'inégalité ($\star$) ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \qquad (\star)$$

3. En utilisant la question II.2 de la partie A, démontrer que l'inégalité ($\star$) est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u}_k(z - z_k)$ est un réel négatif.

4. En déduire que l'inégalité ($\star$) est une égalité si et seulement si $z = 0$.

5. Établir que la somme $\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M que l'on précisera.

Partie C

On se place toujours dans le plan complexe $\mathcal{P}$. On considère trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c et tels que :

- Les points A, B, C ne sont pas alignés.
- Chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ possède une mesure appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi/3[$.

Sur les côtés du triangle ABC, on construit vers l'extérieur trois triangles équilatéraux $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$. On nomme a', b', c' les affixes respectives des points A', B', C'.

I. Faire une figure et tracer les droites (AA'), (BB') et (CC').

II. On admet que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Ω strictement compris à l'intérieur du triangle ABC. En utilisant une rotation de centre A exprimer b' en fonction de a et c et b en fonction de a et c'.

III. En déduire le module et un argument de $\frac{b'-b}{c-c'}$.

IV. Déterminer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$, $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A})$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

V. Démontrer que

$$\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}.$$

VI. En utilisant les résultats de la partie B, établir que la somme $MA + MB + MC$ admet son minimum en un unique point que l'on précisera.

Problème n° 2

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0, +\infty[$.

La partie imaginaire du nombre complexe z est notée $\operatorname{Im} z$.

Préambule

Dans tout le problème, les suites considérées sont à valeurs réelles.

La partie A aborde la convergence des suites monotones et aboutit à quelques résultats sur la série harmonique.

Les parties B et C envisagent l'étude de la convergence au sens de CESÀRO et son lien avec la convergence au sens usuel.

Partie A

I. Questions de cours

1. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.
3. Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.

II. On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Donner une interprétation graphique de a_n à partir de la représentation graphique de la fonction inverse sur l'intervalle $[1, n+1]$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

   b. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?
3. Recherche d'un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n$.

   c. En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.
4. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = a_n - \ln n$. À l'aide des résultats des questions II.3.a et II.3.b, démontrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Partie B

À toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de CESÀRO si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

I. **1.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon.$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

II. Application à la recherche d'un équivalent :

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1+x_n}.$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

6. Exprimer v_n en fonction de x_{n+1} et x_1 et en déduire un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$.

III. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

2. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ.

a. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

b. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.

c. Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

Partie C

I. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

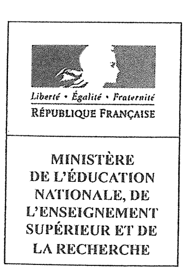
1. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Conclure quant à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question I.2 de la partie B.

II. Soit α un nombre réel. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sin n\alpha$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $c_n = \cos n\alpha$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de c_{n+1} et $u_{n+2} + u_n$ en fonction de u_{n+1}.
3. On suppose dans cette question que $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.
   a. On fait l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En utilisant les deux relations établies à la question II.2, démontrer qu'alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge également et préciser les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.
   b. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   c. En remarquant que $\sin k\alpha = \operatorname{Im}(e^{ik\alpha})$, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner la valeur de sa limite.

III. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1. Démontrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité
$$n u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k .$$
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.
3. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.
4. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EBE MAT 2

SESSION 2015

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIÈME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 1

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $[\![p,q]\!]$ l'ensemble des entiers relatifs k tels que $p \leqslant k \leqslant q$.

Préambule

Ce problème a pour objet l'étude de deux méthodes de chiffrement.

À chaque lettre de l'alphabet est associé un unique entier compris entre 0 et 25 de la façon suivante : à la lettre A est associé 0, à la lettre B est associé 1, ..., à la lettre Z est associé 25. Cet entier est appelé **rang de la lettre**.

Partie A. – Un chiffrement monographique

L'objectif de cette partie est de démontrer les théorèmes de Bézout, puis de Gauss, et de mettre en œuvre ces théorèmes dans le chiffrement proposé.

I. Soient a et b des entiers relatifs non nuls.

1. Montrer que s'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
2. On veut à présent prouver que la réciproque de cette propriété est vraie. On suppose que a et b sont premiers entre eux et on considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers relatifs de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs.
   - **a.** Montrer que l'ensemble $\mathscr{E} \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, que l'on notera n_0.
   - **b.** Démontrer que le reste de la division euclidienne de a (respectivement b) par n_0 vaut 0.
   - **c.** Conclure.
3. Énoncer le théorème ainsi démontré.

II. À l'aide du théorème précédent, démontrer que, pour tous les entiers relatifs non nuls a, b et c, si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

III. Chiffrement lettre à lettre

1. Un exemple. — Dans cette question, on décide de coder chaque lettre d'un mot par un nombre y défini comme suit : *si x est le rang de la lettre à coder, y est le reste de la division euclidienne de* $58x$ *par* 369.
   - **a.** Coder le mot GAUSS.
   - **b.** Proposer une activité de classe sur tableur permettant, à partir du codage des 26 lettres de l'alphabet de décoder le mot de 6 lettres qui se cache derrière la suite de nombres :

     290 232 248 327 0 364

     (Dans cette question, le décodage effectif n'est pas demandé ; il le sera à la question III.3.c.)

2. Principe général du chiffrement lettre à lettre. — On se donne un couple d'entiers naturels (n,e) vérifiant les conditions suivantes :

- L'entier n est supérieur ou égal à 26.
- Les entiers n et e sont premiers entre eux.

Chaque lettre est alors codée de la façon suivante : *si x est le rang de la lettre à coder, y est le reste de la division euclidienne de ex par n.*

a. Démontrer qu'il existe un entier naturel f tel que $fe \equiv 1 \pmod{n}$.

b. Démontrer que la connaissance de f permet de retrouver x à partir de y. On dit que f est une *clé de décodage* associée à la clé de codage (n,e).

3. Un procédé de construction d'une clé de codage et d'une clé de décodage associée :

- On choisit quatre entiers naturels a, b, c, et d supérieurs ou égaux à 3.
- On pose : $M = ab - 1$, $e = cM + a$, $f = dM + b$ et $n = \dfrac{ef-1}{M}$.

a. Vérifier que (n,e) est une clé de codage et que f est une clé de décodage associée.

b. Calculer n, e, et f lorsque $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ et $d = 6$.

c. Un mot de 6 lettres a été codé à l'aide de la clé définie à la question précédente :

290   232   248   327   0   364

Décoder ce mot.

4. Ensemble des clés de décodage associées à une clé de codage donnée. — On revient au cas général où n est un entier naturel supérieur ou égal à 26 et e un entier naturel premier avec n et on se propose de déterminer l'ensemble des couples (u,v) d'entiers relatifs tels que $nu + ev = 1$.

L'algorithme d'Euclide, qui permet de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls, assure l'existence d'un entier naturel N strictement supérieur à 1 et de deux suites finies $(r_k)_{k\in[\![0,N+1]\!]}$ et $(q_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ telles que :

- La suite $(r_k)_{k\in[\![0,N+1]\!]}$ est strictement décroissante.
- $r_0 = n, \quad r_1 = e \quad$ et $\quad r_{N+1} = 0$.
- $\forall k \in [\![1,N]\!], \quad r_{k-1} = r_k q_k + r_{k+1}$.

a. Que vaut r_N ?

b. Démontrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs $(u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ et $(v_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0,N]\!]$,

$$r_k = nu_k + ev_k.$$

c. En déduire une clé de décodage associée à la clé de codage (n,e).

d. On met en œuvre cette méthode à l'aide d'un tableur à partir de la clé de codage $(369,58)$:

	A	B	C	D
1	r	q	u	v
2	369		1	0
3	58	6	0	1
4	21	2	1	-6
5	16	1	-2	13

Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule C4 pour que, tirée en bas et à droite, elle permette de déterminer les valeurs des termes des deux suites (u_k) et (v_k) ?

e. Déterminer un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $369u + 58v = 1$ et une clé de décodage associée à la clé de codage $(369, 58)$.

f. Déterminer l'ensemble des couples (u, v) d'entiers relatifs tels que $369u + 58v = 1$ et l'ensemble des clés de décodage associées à la clé de codage $(369, 58)$.

Partie B. – Chiffrement de Hill

L'objectif de cette partie est de retrouver quelques résultats sur les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, puis de les appliquer au chiffrement de Hill.

La matrice nulle d'ordre 2 est notée O_2 et la matrice unité d'ordre 2 est notée I_2.

Pour tout entier naturel n non nul, si P et Q sont deux matrices carrées d'ordre 2 dont les coefficients respectifs $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ appartiennent à $\mathbb{Z}$, on dit qu'elles sont congrues modulo n et on note $P \equiv Q \pmod{n}$ lorsque

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}, \quad p_{i,j} \equiv q_{i,j} \pmod{n}.$$

De même, on dit que les vecteurs colonnes à coefficients dans $\mathbb{Z}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sont congrus modulo n et on note $X \equiv X' \pmod{n}$ lorsque $x \equiv x' \pmod{n}$ et $y \equiv y' \pmod{n}$.

Dans toute cette partie, la matrice A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, b, c et d désignent quatre réels.

I. Questions de cours

1. Donner la définition d'une matrice inversible et démontrer l'unicité de son inverse.
2. Établir que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.
3. Démontrer que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

II. Dans cette question, on suppose que a, b, c et d sont des entiers relatifs.

1. Donner un exemple de matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}$, mais dont l'inverse n'a pas tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Énoncer une condition suffisante pour que la matrice A soit inversible et que son inverse A^{-1} soit à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
3. Quelle notion mathématique (qui ne figure pas dans les programmes de lycée) permet de prouver que cette condition est nécessaire ? Proposer une démonstration du résultat.

III. La méthode étudiée ci-après utilise un chiffrement par blocs de 2 lettres pour coder un mot comportant un nombre pair de lettres :

- On choisit quatre entiers naturels non nuls a, b, c et d.
- On note x le rang de la première lettre du bloc et y le rang de la deuxième lettre du bloc.

- On définit les entiers x' et y' de la manière suivante :

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Le rang de la première lettre du bloc codé est le reste modulo 26 de x' ; le rang de la deuxième lettre du bloc codé est le reste modulo 26 de y'.

Un tel chiffrement est dit digraphique.

1. Traduire le système (S) par une relation matricielle à l'aide de la matrice A qui est appelée **matrice de codage**.
2. On donne : $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ et $d = 4$.
   a. Coder le mot BEZOUT.
   b. En détaillant les étapes, décoder le mot suivant :

   S F X M O J
3. On donne à présent $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 3$. On souhaite décoder le mot suivant :

   A K X O U E V H D L

   a. Démontrer qu'il existe un unique entier u compris entre 0 et 25 tel que

   $$7u \equiv 1 \pmod{26}.$$

   b. On note A la matrice de codage associée aux entiers a, b, c et d. Déterminer une matrice B, à coefficients entiers relatifs, telle que $uBA \equiv I_2 \pmod{26}$.
   c. Décoder le mot en détaillant la démarche pour le premier bloc de deux lettres.
4. À quelle condition sur a, b, c et d peut-on décoder tout mot comportant un nombre pair de lettres ?

Problème n° 2

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers relatifs k tels que $p \leqslant k \leqslant q$.

Partie A

Une urne contient des boules rouges et des boules noires. On désigne par n un entier naturel non nul et on considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages avec remise. On attribue à chaque tirage d'une boule noire (échec) la valeur 0 et à chaque tirage d'une boule rouge (succès) la valeur 1. On peut modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre comportant 2^n chemins. Ces chemins sont des n-uplets dont chaque composante appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$. Par exemple, si $n = 4$, un des $2^4 = 16$ chemins est $(0, 0, 1, 0)$.

I. On suppose dans cette question que $n = 4$.

1. Écrire la liste des 16 chemins.
2. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il qui contiennent exactement 2 fois l'élément 1 ?
3. Parmi les chemins contenant exactement 2 fois l'élément 1, combien y en a-t-il contenant 1 à la première place ? À la deuxième place ? À la troisième place ? À la quatrième place ?

II. On revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $k \in [\![0, n]\!]$.

Dans les questions II.1, II.2 et II.3, pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'entier $\binom{n}{p}$ est défini comme au lycée : il s'agit donc du nombre de chemins de l'arbre correspondant à n tirages et réalisant exactement p succès. En particulier, on n'aura pas recours dans ces trois questions à l'expression des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles.

1. Démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. On suppose dans cette question que $k \neq 0$. En exprimant de deux manières différentes le nombre de $(n+1)$-uplets contenant k fois l'élément 1, démontrer que
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$
3. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on se propose de démontrer l'égalité
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
On considère une matrice A à n colonnes dont chacune des $\binom{n}{k}$ lignes est l'un des chemins conduisant à k succès et $n - k$ échecs.
   - **a.** Calculer la somme des éléments d'une ligne de la matrice.
   - **b.** Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Que représente la somme des éléments de la j-ème colonne de la matrice A ?
   - **c.** Conclure.

4. Dans l'enseignement supérieur, on définit, pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, l'entier $\binom{n}{p}$ comme étant le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

   a. Justifier la cohérence de cette définition avec celle qui est donnée au lycée.

   b. Démontrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

   c. Retrouver par le calcul les résultats des questions II.2 et II.3.

III. On note θ la proportion de boules rouges dans l'urne et X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (succès) obtenues à l'issue des n tirages. Identifier la loi de X et, en utilisant la question II.3 ainsi que la formule du binôme, calculer son espérance.

Partie B

Un point se déplace sur un axe gradué. Il se trouve au départ à l'origine et son déplacement à chaque étape est déterminé par le résultat du lancer d'une pièce équilibrée :

- Si on obtient pile, son abscisse augmente de 1.
- Si on obtient face, son abscisse diminue de 1.

On note D_n le nombre de fois où la pièce est tombée sur pile au cours des n premiers lancers et X_n l'abscisse du point à l'issue du n-ième lancer.

I. 1. Donner la loi de la variable aléatoire X_4.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire D_n.

3. Exprimer X_n à l'aide de D_n.

4. Calculer l'espérance de X_n. Interpréter le résultat.

II. 1. Que vaut la probabilité $P(X_n = 0)$ lorsque n est impair ?

2. Calculer la probabilité $P(X_{2n} = 0)$.

III. 1. L'algorithme suivant utilise une fonction `alea()` qui renvoie à chaque appel un nombre aléatoire selon la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$:

```
entrer(n)
x ← 0
pour k allant de 1 à n
      si alea() > 0,5 alors
          x ← x + 1
      sinon
          x ← x − 1
      finsi
finpour
retourner(x)
```

À quoi correspond la valeur renvoyée par cet algorithme ?

2. Écrire un deuxième algorithme, obtenu en modifiant l'algorithme donné, de façon à ce qu'il renvoie le nombre de passages à l'origine à l'issue de n lancers.

Tournez la page S.V.P.

3. Écrire un troisième algorithme, obtenu en modifiant l'algorithme donné, de façon à ce qu'il renvoie la fréquence d'apparition de l'événement $X_n = 0$ au cours de la répétition de 1 000 séries de n lancers.

4. Comment un professeur peut-il exploiter ces algorithmes devant une classe ?

IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on s'intéresse à la position du point à l'issue de $2n$ lancers et au nombre de passages à l'origine entre le premier et le $2n$-ième lancer.

1. Expliquer pourquoi, à l'issue de ces $2n$ lancers, l'abscisse du point ne peut être qu'un entier relatif pair compris entre $-2n$ et $2n$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer la probabilité qu'à l'issue de ces $2n$ lancers, l'abscisse du point soit égale à $2k$.

3. On note C_n la variable aléatoire égale au nombre de passages à l'origine entre le premier et le $2n$-ième lancer.

   Calculer l'espérance $E(C_n)$ de la variable aléatoire C_n et montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$E(C_n) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1.$$

   On pourra utiliser la variable aléatoire Ω_k égale à 1 si l'abscisse du point à l'issue du k-ième lancer est nulle et égale à 0 sinon.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 0184 – D'après documents fournis

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$*.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \ldots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \ldots, a_n$.

Partie B : erreur d'interpolation

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a,b])$ et $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a,b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1,\ldots,a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a,b]$.

I. Soit g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a,b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

II. On fixe $c \in [a,b]$, distinct de $a_1,\ldots,a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a,b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_k}{c-a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a,b]$.

2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a,b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a,b]$.

3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x-a_k}{c-a_k}$.

En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

III. **1.** Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a,b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c-a_k).$$

2. Montrer que le résultat établi dans la question III.1. reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

3. En déduire que $\displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x\in[a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x-a_k|$.

Partie C : un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \begin{cases} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{cases}$$

I. **Première méthode**. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

1. Calculer P.

2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \max_{x\in[0,\pi]} \frac{|x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)|}{6}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geqslant 1$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) \text{ si } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{n}, \\ P_1(x) \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \quad \vdots \\ P_k(x) \text{ si } \dfrac{k\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} \;\; (k \in [\![0, n-2]\!]), \\ \quad \vdots \\ P_{n-1}(x) \text{ si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

2. Justifier que Q_n est continue sur $[0,\pi]$.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.
On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A.II. dans des bases bien choisies.
2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.
3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?
4. Conclure.

III. Seconde méthode. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1 \beta + a_1^2 \alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2 \beta + a_2^2 \alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3 \beta + a_3^2 \alpha &= b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

   a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

   b. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

   c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

      i) $\alpha = 0$.

      ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0.$

      iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D.

II. 1. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.

2. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.

Problème n° 2

Notations.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, n fois dérivable et dont la dérivée n-ième est continue.

Partie A : calcul d'un déterminant et applications

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I. Le déterminant de cette matrice est noté D_n.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.
3. En déduire une expression de D_n.
4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, A_n est inversible.

II. Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $U = A_n^{-1}B$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = b_i,$$

à condition de poser $u_0 = u_{n+1} = 0$.

On suppose désormais que $U = A_n^{-1}B$.

2. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 1$. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $u_i = \frac{i(n+1-i)}{2}$. En déduire que $\max(u_1, \dots, u_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{8}$.

3. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i \geqslant 0$.

a. Soit j le plus grand indice tel que $u_j = \min(u_1, \dots, u_n)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $j = 1$ ou $j = n$.

b. En déduire que toutes les composantes de U sont positives on nulles.

4. On ne fait dans cette question aucune hypothèse sur le signe des b_i.
Soit $\beta = \max(|b_1|, \dots, |b_n|)$. On considère les vecteurs V et $W \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - B\right), \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B\right).$$

a. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i \geqslant 0$ et $w_i \geqslant 0$.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i + w_i \leqslant \beta\dfrac{(n+1)^2}{4}$.

c. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u_i = \frac{w_i - v_i}{2} \leqslant \frac{v_i + w_i}{2} \leqslant \beta\frac{(n+1)^2}{8}.$$

Partie B : inégalité de Taylor-Lagrange

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Soient deux nombres réels a et b dans l'intervalle I.

I. **1.** Justifier que $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

2. Montrer que si $n \geq 2$, alors $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \displaystyle\int_a^b f''(t)(b-t)dt$.

3. Montrer que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.$$

Cette égalité est connue sous le nom de *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.*

II. **1.** Justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

2. Démontrer que

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right| \leqslant M_n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f.*

Partie C : un problème de condition aux bords

Soient a, b deux nombres réels, $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $M = \max_{x\in[0,1]} |g''(x)|$.

I. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,1],\ f''(x) = g(x) \\ f(0) = a,\ f(1) = b \text{ (condition aux bords).} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de chercher une approximation des valeurs de f.

II. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à un ordre et sur des intervalles bien choisis, montrer que, pour tous nombres réels x et h tels que $0 \leqslant x - h \leqslant x + h \leqslant 1$,

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leqslant \frac{Mh^2}{12}.$$

III. On fixe un entier $n \geqslant 1$ et d'après la question précédente, on convient d'approcher $f''(x)$ par

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2},$$

avec $h = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, on pose $x_i = ih$. Sachant que $f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on approxime $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(x_{n+1})$ par respectivement $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ avec $u_0 = a$, $u_{n+1} = b$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} = g(x_i).$$

1. La matrice A_n a été définie dans la partie **A**. Montrer qu'il existe un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$, que l'on explicitera, tel que

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A_n^{-1} B.$$

2. Soit F le vecteur $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs absolues des composantes du vecteur $A_n(F - U)$ sont majorées par $M\dfrac{h^4}{12}$.

3. En utilisant les résultats de la partie **A**, donner une majoration des réels $|f(x_i) - u_i|$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ en fonction de n et M.

4. Conclure.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Voici un problème proposé aux élèves d'une classe de première :

Aline et Bertrand commandent chacun un café et une carafe de lait. Aline ajoute immédiatement le lait dans son café puis attend trois minutes que le mélange refroidisse avant de le boire. Bertrand attend trois minutes que le café refroidisse avant d'y ajouter le lait.

Question posée aux élèves : qui d'Aline ou de Bertrand a bu le café au lait le plus chaud ?

Données :
- Chaque café est servi à la température de 48°C.
- La température ambiante T_a, qui est aussi celle du lait, est de 22°C.
- Chaque tasse contient 15 cL de café et chacun y ajoute 3 cL de lait.
- Lorsque l'on mélange un volume V_1 d'un premier liquide à température T_1 et un volume V_2 d'un second liquide à température T_2, on obtient un liquide dont la température est égale à
$$\frac{V_1T_1 + V_2T_2}{V_1 + V_2}.$$
- L'évolution, à partir d'un temps initial $t_0 = 0$, de la température d'un liquide est modélisée par l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}) \qquad T'(t) = -0,04\,(T(t) - T_a),$$
où T_a désigne la température ambiante exprimée en degré Celsius, $T(t)$ la température du liquide exprimée en degré Celsius à l'instant t (exprimé en minute) et $T'(t)$ la valeur à l'instant t de la dérivée de la fonction T.

La théorie des équations différentielles n'étant pas au programme des classes de première, le professeur décide d'utiliser une méthode de résolution approchée, appelée méthode d'Euler, dont le principe est le suivant :

Méthode d'Euler : on part d'une condition initiale $T(0) = \alpha$, où α est un nombre réel, et d'une relation

$$(\mathcal{R}) \qquad T'(t) = F(T(t)),$$

vérifiée par une fonction T dérivable sur $[0, a]$, où a est un réel strictement positif et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On détermine une valeur approchée de $T(a)$ selon le procédé détaillé ci-dessous.
On choisit un entier n strictement positif.
On détermine une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a$ partageant l'intervalle $[0, a]$ en n intervalles de même longueur.
On pose $y_0 = \alpha$. On note $\mathcal{D}_0$ la droite passant par le point A_0 de coordonnées $(t_0; y_0)$ et de coefficient directeur $F(y_0)$.
On note A_1 le point d'abscisse t_1 de la droite $\mathcal{D}_0$. L'ordonnée y_1 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_1)$.
On note $\mathcal{D}_1$ la droite passant par A_1 et de coefficient directeur $F(y_1)$. On note A_2 le point de $\mathcal{D}_1$ d'abscisse t_2. L'ordonnée y_2 de ce point est prise comme valeur approchée de $T(t_2)$.
On itère ce processus jusqu'à y_n, qui est pris comme valeur approchée de $T(a)$.

Partie A : mise en œuvre de la méthode d'Euler

Soit n un entier strictement positif. On applique la méthode d'Euler à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On note $T_n(3)$ la valeur approchée de $T(3)$ obtenue selon le procédé détaillé ci-dessus. Dans toute la suite, on note (t_k, y_k) les coordonnées des points A_k construits à la k-ième étape de la méthode d'Euler.

I. Exprimer les réels $t_0, \ldots, t_n$ subdivisant le segment $[0, 3]$ en n intervalles de même longueur.

II. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}_k$.

III. En déduire que $y_{k+1} = \left(1 - \dfrac{0,12}{n}\right) y_k + \dfrac{2,64}{n}$.

IV. Le professeur demande aux élèves de donner des valeurs approchées des températures du café de Bertrand et du café au lait d'Aline au bout de trois minutes à l'aide de la méthode d'Euler. Voici la production d'un élève ayant utilisé un tableur pour calculer la température du café de Bertrand :

	A	B
1	Température ambiante	22
2	Température initiale	48
3	n	20
4		
5	Temps	Température café
6	0	48
7	1	47,844
8	2	47,688936
9	3	47,534802384
10	4	47,3815935697
11	5	47,2293040083
12	6	47,0779281842

1. Quelle formule l'élève a-t-il pu saisir dans la cellule B7 pour obtenir ces résultats en étirant la formule vers le bas et en utilisant les données contenues dans les cellules B1, B2 et B3 ?

2. Comment l'élève peut-il modifier sa production pour calculer une valeur approchée de la température du café au lait d'Aline au bout de trois minutes ?

V. **1.** Écrire un algorithme permettant d'obtenir y_n à partir des entrées $\alpha = T(0)$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. Utiliser cet algorithme pour répondre à la question posée dans le problème en prenant $n = 20$.

Partie B : résolution exacte

I. Soit α un réel strictement positif. Déterminer la solution exacte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) & = -0,04\,(y(t) - 22) \\ y(0) & = \alpha \end{cases}$$

II. En appliquant le résultat de la question précédente pour deux valeurs bien choisies de α, répondre à la question posée aux élèves. On donnera une valeur approchée décimale de la température en degré Celsius des cafés au lait d'Aline et de Bertrand à 10^{-2} près.

Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler

On étudie la convergence de la suite $(T_n(3))_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque l'on prend la condition initiale $\alpha = 48$.

I. Dans cette question, n est fixé.

1. Donner deux réels a et b tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$y_{k+1} = ay_k + b.$$

2. Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.

3. En considérant la suite $(y_k - \ell)_{k\in[\![0,n]\!]}$, exprimer $y_n = T_n(3)$ en fonction de n.

II. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(3)$ et comparer avec le résultat obtenu dans la partie B.

III. Déterminer un équivalent de $|T(3) - T_n(3)|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème n° 2

Notations. Pour m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Le protocole de tirage d'une boule dans une urne, décrit ci-dessous, est utilisé tout au long de ce problème.

> Une urne contient b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher (b et r sont des entiers naturels dont au moins un est non nul).
> On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne et elle y est remplacée par une boule blanche, de sorte que le nombre $N = b + r$ de boules dans l'urne reste constant.

Le but de ce problème est d'étudier plusieurs expériences aléatoires de tirages successifs en suivant ce protocole.

Partie A : un cas particulier

On suppose dans cette partie que $b = 2$ et $r = 3$.

I. Première expérience aléatoire. On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

1. Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance $E(X)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

II. Seconde expérience aléatoire. On effectue trois fois le protocole de tirage.

1. Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y et calculer son espérance $E(Y)$. Donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près ainsi qu'une interprétation de cette espérance.

III. L'algorithme suivant utilise une fonction **alea**$(1..n)$ qui rend un nombre entier aléatoire obtenu de façon équiprobable dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

```
Entrer(b, r)
d ← alea(1..b + r)
Si (d > b) Alors
    résultat ← rouge
    b ← b + 1
    r ← r − 1
Sinon
    résultat ← blanche
Fin Si
Retourner(résultat)
```

1. Que simule cet algorithme ?

2. Compléter cet algorithme en un nouvel algorithme simulant la variable aléatoire X.

Partie B : généralisation

Dans cette partie, on généralise les résultats obtenus précédemment au cas où b et r sont des entiers naturels non nuls quelconques.

I. Première expérience aléatoire. On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Pour tout entier strictement positif n, on note A_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Donner l'ensemble E des valeurs prises par X.

2. Pour $k \in E$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements liés aux événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

3. **Question de cours**. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

a. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B) > 0$. Rappeler la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. On la notera $P(A \mid B)$ ou $P_B(A)$.

b. Soit i un entier strictement positif et soient $B_1, \ldots, B_i$ des événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}) > 0$. Après avoir justifié l'existence des probabilités conditionnelles $P(B_2 \mid B_1)$, …, $P(B_i \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1})$, montrer que

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_i) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) \ldots P(B_i \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}).$$

4. **a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Vérifier que $P(X = r + 1) = \dfrac{r!}{N^r}$ et que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!N^k}.$$

5. **a.** Démontrer que, pour tout entier strictement positif n et tous réels $p_0, \ldots, p_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1} - p_k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k\right) - np_n.$$

b. En déduire que l'espérance de X est donnée par

$$E(X) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \frac{k!}{N^k}.$$

II. Seconde expérience aléatoire. Soit n un entier strictement positif. On effectue n fois le protocole de tirage. Pour tout entier $m \in [\![1, n]\!]$, on note Y_m la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues à l'issue du m-ième tirage. Par convention, Y_0 est la variable aléatoire nulle.

1. **a.** Donner la valeur de $P(Y_n = k)$ lorsque $k > n$.

b. Donner la valeur de $P(Y_n = k)$ lorsque $k > r$.

c. Donner la valeur de $P(Y_n = 0)$.

2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer la probabilité conditionnelle

$$P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = i).$$

En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(Y_n = k) = \frac{b+k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{r+1-k}{N} P(Y_{n-1} = k-1).$$

3. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r + k(N-1)}{N} P(Y_{n-1} = k) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_{n-1}) + \frac{r}{N}.$$

4. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$E(Y_n) = r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

b. Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))_{n \geqslant 0}$ et montrer l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$|E(Y_n) - r| \leqslant \frac{1}{4}.$$

III. **1.** Pour tout entier strictement positif k, on note A_k l'événement « la k-ième boule tirée est rouge ». En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i).$$

2. Exprimer $P(A_{k+1})$ en fonction de $E(Y_k)$ et en déduire une expression de $P(A_{k+1})$ en fonction de r, k et N.

IV. **1.** En utilisant la question B. II. 2. et le théorème du transfert, montrer que, pour tout entier n strictement positif,

$$E\left(Y_n(Y_n - 1)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k(k-1)(N-2) + 2(r-1)k}{N}\right) P(Y_{n-1} = k).$$

2. En déduire que, pour tout entier n strictement positif,

$$E\left(Y_n(Y_n-1)\right)=\left(1-\frac{2}{N}\right)E\left(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)\right)+\frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$E\left(Y_n(Y_n-1)\right)=r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right).$$

4. Exprimer $V(Y_n)$ en fonction de $E(Y_n(Y_n-1))$ et de $E(Y_n)$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$V(Y_n)=r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}+r\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}-r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

V. **1.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n)$.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout réel α strictement positif,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n-E(Y_n)|\geqslant\alpha)=0.$$

3. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n-r|-|r-E(Y_n)|\geqslant\alpha)=0.$$

4. On rappelle que n_0 est introduit dans la question B.II.4.b. On fixe $\alpha=\frac{1}{2}$. Montrer que si $n\geqslant n_0$, alors :

$$P(|Y_n-r|-|r-E(Y_n)|\geqslant\alpha)=P(Y_n\neq r).$$

5. Conclure.

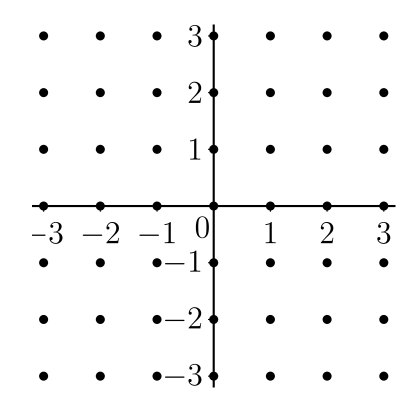
Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est notée d.
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$. On le note $\mathcal{R}$. Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau $\mathcal{R}$.



Partie A : $\mathbb{Z}$-bases du réseau

Soient $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$.
- Tout élément X de $\mathcal{R}$ s'écrit de façon unique $X = ae'_1 + be'_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

I. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si, et seulement si,

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

a. Montrer que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

b. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$x_1 e'_1 + y_1 e'_2 = e_1 \qquad\qquad x_2 e'_1 + y_2 e'_2 = e_2.$$

c. Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.

d. En déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

3. On suppose dans cette question que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

a. Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

4. Conclure.

III. Soit $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{R}$.

1. Montrer que si e'_1 est le premier vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$, alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur e'_2 de $\mathcal{R}$ tel que (e'_1, e'_2) soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

3. Donner une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sa matrice dans la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est notée A.

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ si, et seulement si, les coefficients de A sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que f est surjective, puis bijective.

3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont des entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

1. En utilisant les résultats de la partie **A.**, montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de $\mathbb{R}^2$ telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G, muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G.

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie **B.** s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les points X de $\mathcal{R}$ situés à la distance 1 de O.

2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base $\mathcal{C}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2.

2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.

3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0.

4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est dans H, alors f est un élément de G_0.

IV. Donner tous les éléments de G_0.

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0.

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans $\mathcal{R}$ et g un élément de G_0.

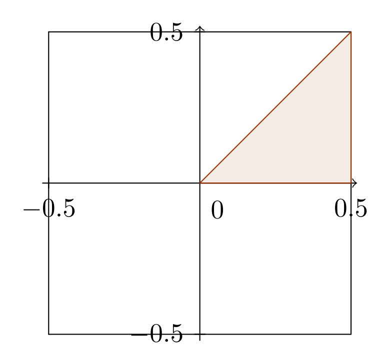
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$



I. 1. Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0, alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X.

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de $\mathcal{R}$, alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III. 1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G} f(T).$$

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G, alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad s_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?

2. Soit k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$ et $t_k \circ t_l$.

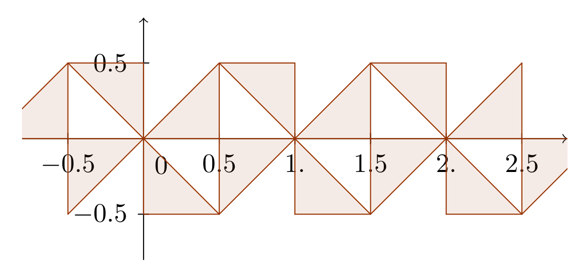
II. Soit $H = \{t_k, s_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où T est le triangle défini dans la section **D**. Décrire l'ensemble F.

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Dans ce problème, on cherche à déterminer les applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(b) f est bornée sur $]1, +\infty[$: il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant A$.

I. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit φ une application définie sur I et à valeurs dans I. On dit que φ est une involution de I si pour tout nombre réel x dans I,

$$\varphi(\varphi(x)) = x.$$

1. Donner un exemple d'involution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ autre que l'identité.

2. Donner un exemple d'involution de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ autre que l'identité.

3. Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les conditions **(a)** et **(b)**.

1. Soit deux nombres réels y_1, y_2 strictement positifs tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.

2. Montrer que f est injective.

3. Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.

4. Montrer que f est une involution de $]0,+\infty[$.

5. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
Indication : on pourra poser $y = f(b)$.

III. On note F l'ensemble des points fixes de f :

$$F = \{x \in]0,+\infty[, f(x) = x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $xf(x) \in F$.

2. Montrer que $1 \in F$.

3. Montrer que si x et y sont des éléments de F, alors xy et $\dfrac{x}{y}$ sont également des éléments de F.

4. Montrer que si x est un élément de F, alors pour tout entier naturel n, x^n est un élément de F.

5. Montrer que si x est un élément de F, alors $x \leqslant 1$.
Indication : on pourra considérer la suite $(x^n)_{n \geqslant 0}$.

6. Montrer que $F = \{1\}$.

7. En déduire f.

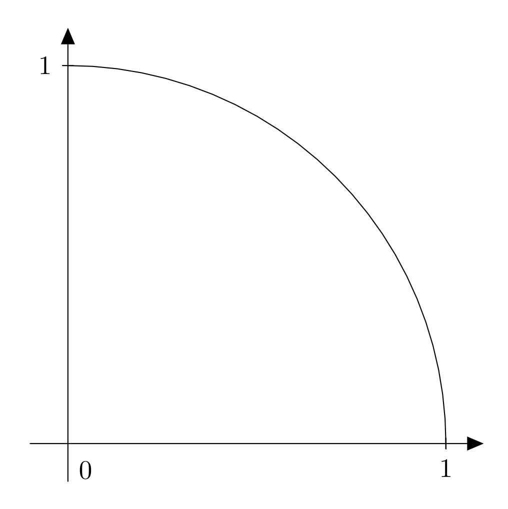
IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On considère le quart de cercle unité du plan usuel, représenté sur la figure ci-dessous :



I. Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ du quart de disque $\mathcal{D}$ délimité par les deux axes de coordonnées et ce quart de cercle ?

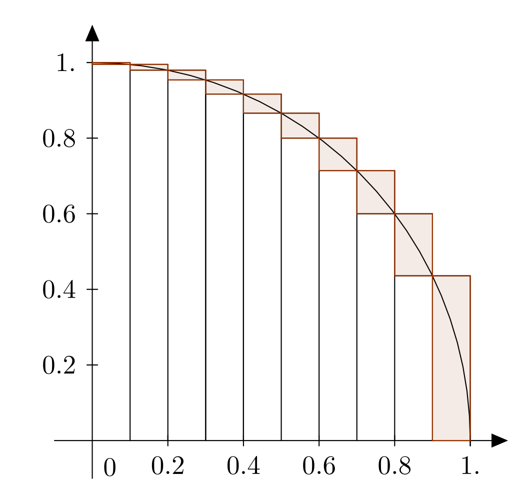
II. Montrer que cette aire est également la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Par la suite, on considère la fonction

$$\phi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

III. On s'intéresse tout d'abord à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la *méthode des rectangles*.



On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. On introduit une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

à pas constant de l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ x_i = \frac{i}{n}.$$

Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on considère les points $A_i(x_i, \phi(x_i))$ et, pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, on construit sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ le rectangle *au-dessous de la courbe* de sommets

$$(x_i, 0), \qquad (x_{i+1}, 0), \qquad (x_{i+1}, \phi(x_{i+1})), \qquad (x_i, \phi(x_{i+1}))$$

et le rectangle *au-dessus de la courbe* de sommets

$$(x_i, 0), \qquad (x_{i+1}, 0), \qquad (x_{i+1}, \phi(x_i)), \qquad (x_i, \phi(x_i)).$$

On a représenté ces rectangles pour $n = 10$ sur la figure ci-dessus. La différence ensembliste de ces rectangles a été grisée.

On note $\check{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessous la courbe et $\hat{s}(n)$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

1. Un élève de terminale scientifique affirme à propos de cette méthode : « Plus le nombre de rectangles augmente, plus les sommets des rectangles se rapprochent de la courbe, donc la somme des aires des rectangles tend vers $\mathcal{A}$ ». Que répondez-vous à cet élève ?

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\check{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi(x_i).$$

3. Montrer que la somme des aires des rectangles grisés sur la figure précédente est

$$\hat{s}(n) - \check{s}(n) = \frac{1}{n}.$$

4. Déterminer un entier N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $|\mathcal{A} - \hat{s}(n)| \leqslant 10^{-3}$.

5. Représenter sur une même figure $\hat{s}(2)$, $\check{s}(2)$, $\hat{s}(4)$ et $\check{s}(4)$. Comparer $\hat{s}(2)$ et $\hat{s}(4)$, puis $\check{s}(2)$ et $\check{s}(4)$.

6. Montrer que les suites de terme général $\hat{s}(2^n)$ et $\check{s}(2^n)$ sont adjacentes.

7. En quoi ce résultat peut-il vous aider à répondre à l'élève de la question 1 ?

8. Écrire un algorithme de calcul de $\hat{s}(n)$.

IV. On s'intéresse ici à une évaluation de $\mathcal{A}$ grâce à la méthode dite *méthode des trapèzes.* Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note

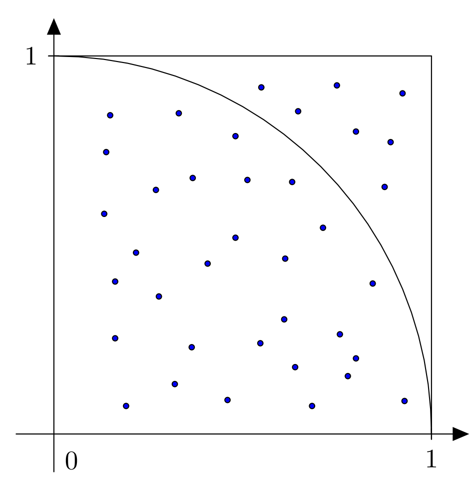
$$s(n) = \frac{\hat{s}(n) + \check{s}(n)}{2}.$$

1. Justifier le nom de *méthode des trapèzes*. On représentera $s(4)$ sur une figure.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\check{s}(n) \leqslant s(n) \leqslant \hat{s}(n)$.

3. Indiquer laquelle des trois valeurs $\hat{s}(n)$, $\check{s}(n)$ ou $s(n)$ est la meilleure approximation de $\mathcal{A}$.

V. On s'intéresse maintenant à une autre méthode, appelée *méthode de Monte-Carlo*. Il s'agit de tirer aléatoirement un point du carré unité de façon uniforme et de calculer la fréquence des points qui sont dans le quart de disque $\mathcal{D}$.



On admet que la probabilité qu'un point tiré de cette manière soit dans le quart de disque est égale à $\mathcal{A}$.

1. Soit $M(x, y)$ un point du carré $[0, 1]^2$. Montrer que ce point est dans le quart de disque dont on cherche à mesurer l'aire si, et seulement si, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2. On dispose de la fonction (sans argument) **alea**, qui renvoie à chaque appel un nombre réel tiré au hasard uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Écrire un algorithme qui simule un tirage aléatoire de N points du carré unité et calcule la fréquence f des points figurant dans le quart de disque $\mathcal{D}$.

3. f étant la fréquence obtenue lors d'un tirage aléatoire de N points du carré unité, déterminer un intervalle de confiance de $\mathcal{A}$ au niveau de confiance 95 %.

4. En déduire le nombre N de tirages à effectuer pour obtenir, au niveau de confiance 95 %, une estimation de $\mathcal{A}$ avec une précision égale à 10^{-3}.

5. Comparer ce résultat avec celui de la question **III.4.**

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.
On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions.
Soit $(X^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel k, on pose $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. On dit que la suite $(X^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers X si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(x_i^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers x_i.
Soit $(A^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel k, on pose $A^{(k)} = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On dit que la suite $(A^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers A si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers $a_{i,j}$.
Soit G un graphe orienté fini et soient i et j deux sommets de ce graphe. On dit que j est un sommet voisin de i s'il existe une arête orientée de G reliant i à j.

Partie A : marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe au cours d'étapes, le nombre d'étapes pouvant tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un des sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.
Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$, la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $a_{i,j} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j}$ est notée A. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition* du graphe.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)} \ldots, p_{n-1}^{(k)}, p_n^{(k)}\right)$, où pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

I. Résultats généraux

1. Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \ldots + p_n^{(k)} = 1$.

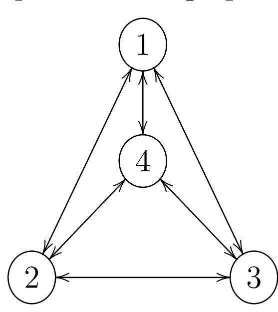
2. Montrer que, pour tout tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

3. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de A, k et $P^{(0)}$.

4. On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Montrer que $PA = P$ et que $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

II. Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On remarque que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer la matrice de transition A en fonction de U.

2. Calculer U^2 et U^3.

3. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ et $(\beta_k)_{k\geqslant 0}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Montrer de plus que, pour tout entier naturel k,

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\beta_k \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k \end{cases}$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.

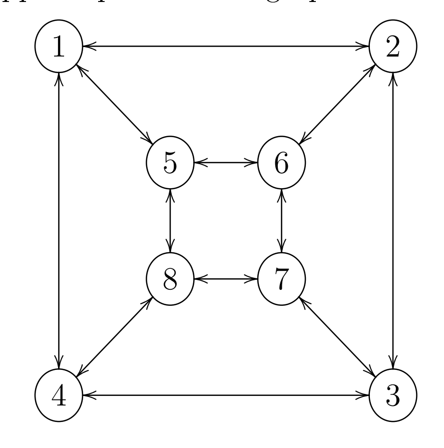
5. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_k = \dfrac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \dfrac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.

6. En déduire pour tout entier naturel k une expression de $P^{(k)}$.

7. Montrer que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge et déterminer la limite de $P^{(k)}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

III. Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets à qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $X = \{1, 3, 6, 8\}$ et $Y = \{2, 4, 5, 7\}$.

1. Donner la matrice de transition A de ce graphe et calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

2. Montrer que si le point se trouve sur un sommet de la partie X à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de Y à l'étape suivante, et que s'il se trouve sur un sommet de Y à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de X à l'étape suivante.

3. **a.** Démontrer que les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de X sont nuls si k est impair, et que les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de Y sont nuls si k est pair.

b. La suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge t-elle ?

IV. On revient au cas général d'un graphe G à n sommets. Parmi les trois liens logiques condition nécessaire, condition suffisante et condition nécessaire et suffisante, quel est celui qui relie les deux propositions suivantes ?

(i) la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge ;
(ii) il existe un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$, avec $p_1, \ldots, p_n$ positifs ou nuls et $p_1 + \ldots + p_n = 1$, tel que $PA = P$.

La réponse, qui devra être soigneusement justifiée, sera présentée sous deux formes : une phrase rédigée en français et une proposition mathématique comportant une implication ou une équivalence.

Partie B : matrices stochastiques et densités de probabilité

Définitions.
Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une densité de probabilité si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice stochastique si chaque ligne de A est une densité de probabilité.

I. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que A est une matrice stochastique si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. Montrer que la matrice de transition d'un graphe (définie dans la partie **A.**) est une matrice stochastique et que, pour tout entier naturel k, le vecteur $P^{(k)}$, lui aussi défini dans la partie **A.**, est une densité de probabilité.

III. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $X \in \mathbb{R}^n$ une densité de probabilité. Montrer que XA est une densité de probabilité.

IV. Soient A et B deux matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que AB est une matrice stochastique.

2. Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que $\alpha A + (1-\alpha)B$ est une matrice stochastique.

V. Soit $(X^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, convergeant vers un vecteur X. Montrer que, si pour tout entier naturel k, $X^{(k)}$ est une densité de probabilité, alors X est une densité de probabilité.

VI. Soit $(A^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, convergeant vers une matrice A. Montrer que, si pour tout entier naturel k, $A^{(k)}$ est une matrice stochastique, alors A est une matrice stochastique.

Partie C : PageRank, un premier modèle

Le moteur de recherche Google annonce environ 339 000 résultats à la requête « capes mathématiques ». Sur la première page de résultats, il classe en premier le site `capes-math.org`, puis le site `www.devenirenseignant.gouv.fr`. Le succès de ce moteur de recherche tient à sa rapidité, son exhaustivité et la qualité du classement qu'il effectue entre les différentes pages, à partir d'une « mesure d'importance » attribuée à chacune. Cette mesure d'importance d'une page s'appelle sa pertinence. On se propose d'étudier deux algorithmes permettant de déterminer la pertinence de chaque page du web. Le second algorithme, connu sous le nom de *PageRank*, a été inventé par Sergey Brin et Larry Page.

Le mot « PageRank » lui-même est une marque déposée par Google. Le procédé a été breveté par l'université de Stanford qui en a accordé une licence exclusive à Google.

On modélise le web par un graphe orienté à n sommets représentant chacun une page et dont les arêtes représentent les liens entre celles-ci (liens hypertextes, citations d'articles, etc.) ; la notation $i \to j$ traduit le fait que la page i pointe vers la page j.
Pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, λ_i désigne le nombre de liens issus de la page i et μ_i désigne la pertinence de cette page.

On impose à la suite $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ des pertinences des pages du web de vérifier les deux conditions suivantes :

(i) la pertinence d'une page dépend des pertinences des pages qui pointent vers elle de manière affine ;

(ii) plus il y a de liens issus d'une page, plus la contribution de cette page dans la pertinence des pages vers lesquelles elle pointe est faible.

I. Montrer que toute suite $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de nombres réels positifs ou nuls satisfaisant aux n conditions

$$(*) \qquad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \mu_j = \sum_{i\to j} \frac{1}{\lambda_i}\mu_i.$$

vérifie les conditions (i) et (ii).
Toute solution $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ du système linéaire $(*)$ formée de réels positifs ou nuls fournit les pertinences des n pages du web. Dans la pratique, la résolution de ce système est impossible, le nombre n de pages du web étant beaucoup trop élevé. Pour cette raison, on cherche une autre méthode pour obtenir les pertinences.

II. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

– Si $i \neq j$, on pose

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{s'il n'y a pas de lien de la page } i \text{ vers la page } j\,; \\ \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{si } i \to j. \end{cases}$$

– Si $i = j$, dans le cas où il n'y a aucun lien qui permette de sortir de la page i, on convient d'écrire $a_{i,i} = 1$, pour indiquer que si on arrive sur cette page, on y reste ; sinon, on note $a_{i,i} = 0$.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le coefficient $a_{i,j}$ peut s'interpréter comme la probabilité qu'une personne navigant sur le web et se trouvant sur la page i suive le lien vers la page j en choisissant au hasard entre les λ_i liens disponibles à partir de la page i s'il y en a et reste sur la page i sinon. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $a_{i,j}$.

Montrer que A est une matrice stochastique.

III. Montrer que la suite finie $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ vérifie les conditions $(*)$ introduites à la question **I.** si et seulement si la matrice ligne $M = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ vérifie $M = MA$.

IV. On note dans la suite $P^{(k)}$ la densité de probabilité après k clics : le coefficient d'indice i de la matrice ligne $P^{(k)}$ est la probabilité que le « surfeur » se trouve sur la page i après k clics.

1. Vérifier que pour tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

2. Montrer que si la suite $(P^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge vers une densité de probabilité limite P, alors cette densité de probabilité vérifie les conditions $(*)$ et fournit donc une mesure de la pertinence des pages du web.

Partie D : PageRank, un second modèle

On a vu dans la partie **A.** que l'existence de cette densité de probabilité limite n'est pas toujours assurée. De plus, il peut arriver que certaines pages ne comportent aucun lien vers d'autres pages. Selon le premier modèle, lorsque le surfeur arrive sur l'une d'entre elles, il lui est impossible de la quitter. Ce modèle n'étant pas conforme à la réalité, on étudie un second modèle qui introduit la possibilité de quitter à chaque clic une page quelconque pour se diriger vers une autre choisie au hasard, et ce avec une probabilité fixe $\alpha \in]0, 1[$, appelée *facteur d'amortissement.*

Non seulement ce modèle permet de mieux rendre compte de la réalité, mais en plus on va montrer qu'il garantit l'existence d'une densité de probabilité limite fournissant une mesure de la pertinence des n pages.

On considère la matrice

$$B = (1 - \alpha)A + \frac{\alpha}{n}J$$

où J est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, A la matrice stochastique définie dans la partie **C.** et L la matrice ligne possédant n coefficients tous égaux à 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad L = \big(1, \cdots, 1\big)\,.$$

I. Montrer que B est une matrice stochastique.

II. On suppose qu'il existe un vecteur ligne $N = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ de réels positifs ou nuls vérifiant $N = NB$, tel que $\nu_1 + \ldots + \nu_n = 1$. Montrer que la suite $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ vérifie les conditions (i) et (ii) énoncées dans la partie **C**.

III. Montrer que, si Q est une densité de probabilité, alors $QJ = L$.

IV. Justifier que la matrice colonne U de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 vérifie $AU = U$. En déduire que 1 est une valeur propre de la matrice A.

V. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, où $z_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, un vecteur propre associé. On note

$$|Z| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|.$$

1. À l'aide de l'inégalité triangulaire appliquée à une coordonnée bien choisie du vecteur AZ, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
2. En déduire que, si β est un nombre réel strictement supérieur à 1, la matrice $A - \beta I_n$ est inversible.
3. En déduire que si γ est un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, la matrice $I_n - \gamma A$ est inversible.

VI. 1. Justifier que la matrice $I_n - (1-\alpha)A$ est inversible. Cela permet de poser

$$H = \frac{\alpha}{n} L (I_n - (1-\alpha)A)^{-1}.$$

2. Vérifier que $H = (1-\alpha)HA + \dfrac{\alpha}{n} L$.

VII. Soit Q une densité de probabilité. On définit la suite $(Q^{(k)})_{k \geqslant 0}$ par $Q^{(k)} = QB^k$ pour tout entier naturel k.

1. Démontrer, pour tout entier naturel k, l'égalité $(Q^{(k+1)} - H) = (1-\alpha)(Q^{(k)} - H)A$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel k,

$$Q^{(k)} - H = (1-\alpha)^k (Q - H) A^k.$$

VIII. En utilisant le fait que A^k est une matrice stochastique, montrer que les suites formées par les coefficients des matrices lignes $(Q-H)A^k$ sont bornées. Que peut-on en déduire pour la suite des densités de probabilité $Q^{(k)}$?

IX. Que peut-on en conclure pour le vecteur ligne H ?

X. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle exposée dans la partie **C.** ?

XI. Le calcul de l'inverse de la matrice $I_n - (1-\alpha)A$ permettant de calculer H étant très coûteux, on se contente d'approcher H par $Q^{(k)} = QB^k$ pour des valeurs de k suffisamment grandes. Quelle justification mathématique peut-on apporter à cette pratique ?

CAPES de mathématiques
Option Mathématiques–Session 2018

Le sujet est comporte cinq parties.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m;n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
On note e le nombre $\exp(1)$, image de 1 par la fonction exponentielle.
On rappelle que, pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$. Cet entier $E(x)$ est appelé *partie entière de x*.

Partie A : suites adjacentes

Étant donné deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on rappelle qu'elle sont dites *adjacentes* si l'une des deux est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

I. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.

2. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

3. On suppose de plus les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement monotones. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n < \ell < b_n.$$

II. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{e} - a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 < \mathrm{e} - a_n < \dfrac{1}{n \times n!}$.
En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Indication : on pourra étudier les variation de la fonction $t \mapsto (1-t)e^t$.

4. En déduire une valeur de n telle que a_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

5. On suppose que e est un nombre rationnel.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que le nombre e $q!$ soit un entier naturel.

b. Montrer que $x = q!\left(\mathrm{e} - \sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!}\right)$ est un entier naturel.

c. Montrer que $0 < x < 1$.

d. Conclure.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. On rappelle que f est dite *développable en série entière* au voisinage de 0 s'il existe un nombre réel $R > 0$ et une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels tels que $]-R, R[$ est inclus dans I et :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

III. 1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser son développement et donner le rayon de convergence de cette série entière.

2. Justifier que, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On énoncera avec soin le théorème utilisé.

3. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Démontrer que les deux suites $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x dans l'intervalle $[0, 1[$,

$$S_{2n+1}(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant S_{2n}(x)$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$S_{2n+1}(1) \leqslant \ln(2) \leqslant S_{2n}(1).$$

6. Démontrer que $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie B : écriture d'un entier en base deux

Le but de cette partie est de démontrer que tout entier naturel N supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k \quad \text{avec} \quad n \geqslant 2 \text{ et } \begin{cases} \forall k \in [\![0 \ ; \ n-2]\!], & d_k \in \{0, 1\}, \\ d_{n-1} = 1. \end{cases}$$

L'égalité précédente se note $N = \overline{d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_0}$ (écriture de N en base deux) ; la suite finie $(d_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ s'appelle la suite des chiffres dans l'écriture de N en base deux.

Dans toute cette partie, N désigne un entier naturel supérieur ou égal 2.

IV. On suppose que $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$ avec $\forall k \in [\![0\ ;\ n-2]\!]\quad d_k \in \{0,1\}$ et $d_{n-1} = 1$.

1. Montrer que $2^{n-1} \leqslant N \leqslant 2^n - 1$.

2. Montrer que d_0 est le reste de la division euclidienne de N par 2.

3. Démontrer que la suite $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ est déterminée de manière unique.

V. On définit deux suites d'entiers $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = N$ et pour tout entier naturel k, y_{k+1} et d_k désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de y_k par 2.

1. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer N en fonction de k, $d_0, \ldots, d_{k-1}$ et y_k.

2. Démontrer que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0}$ soit l'écriture de N en base deux.

3. Écrire un algorithme qui, pour tout entier naturel N supérieur ou égal 2 donné, renvoie la suite $(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$ des chiffres de son écriture en base deux.

4. Écrire en base deux le nombre qui s'écrit 391 en base dix.

VI. On se propose à présent de calculer le nombre N qui s'écrit $\overline{d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0}$ en base deux.

1. Première méthode : méthode « naïve ».
On écrit $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

2. Deuxième méthode : méthode de Hörner.
On écrit $N = ((((d_{n-1} \times 2 + d_{n-2}) \times 2 + d_{n-3}) \times 2 + \ldots) \times 2 + d_0$. Combien d'opérations (additions et multiplications) doit-on effectuer a priori pour calculer N avec cette méthode ?

3. Écrire un algorithme qui, pour toute suite de chiffres $(d_0, \ldots, d_{n-1})$ donnée, renvoie la valeur de N calculée à l'aide de cette deuxième méthode.

4. Quel est le nombre dont l'écriture en base deux est $\overline{101001000100001}$?

Partie C : nombres dyadiques

L'ensemble $D_2 = \left\{ \frac{a}{2^p}\ ; a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}$ est appelé ensemble des nombres dyadiques. On note D_2^+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs ou nuls.

VII. Montrer que $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans D_2 et que D_2 est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$. *Indication :* on pourra montrer que $\frac{1}{3} \notin D_2$.

VIII. Soit $x \in D_2^+ \setminus \mathbb{N}$. On se propose de démontrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ et une unique suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{-k}, \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Le membre de droite de cette égalité s'appelle le développement dyadique de x.

1. On suppose qu'une telle suite existe. Montrer que $a_0 = E(x)$ puis montrer que la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est déterminée de manière unique.

2. On souhaite à présent montrer l'existence d'une telle suite. À l'aide de la partie précédente, montrer l'existence d'un entier a_0, d'un entier $p \geqslant 1$ et d'une suite de nombres entiers $d_0, \ldots, d_{p-1}$ égaux à 0 ou 1, non tous nuls, tels que

$$x = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p}.$$

3. Conclure.

IX. Donner le développement dyadique de $\dfrac{35}{4}$.

Partie D : développement dyadique illimité

On appelle suite dyadique toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_k est un élément de $\{0, 1\}$. De plus :

— une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite impropre s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant m$, $a_k = 1$;

— une suite dyadique $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est dite propre si elle n'est pas impropre.

X. On suppose que $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

1. Démontrer que la série de terme général $a_k 2^{-k}$ est convergente. On note sa somme $s(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}$.

2. Soit N un entier naturel. Que vaut $\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k}$?

3. Vérifier que $s(a) \in [0, 1]$.

4. Montrer que si a est une suite dyadique propre, alors $s(a) \in [0, 1[$.

5. Montrer que si a est une suite dyadique impropre, alors $s(a)$ est un nombre dyadique.

6. Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$a_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair,} \\ 1 \text{ si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Montrer que $s(a) = \dfrac{1}{3}$.

XI. Soit x un nombre dyadique compris dans l'intervalle $[0, 1[$.

1. En utilisant les résultats de la partie C, montrer qu'il existe une suite dyadique propre a telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

2. Montrer que si x est non nul, alors il existe également une suite dyadique impropre b telle que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 2^{-k}.$$

XII. Dans cette question, on considère un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$. On lui associe la suite $\alpha(x) = (\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par l'égalité

$$\alpha_k(x) = E(2^k x) - 2E(2^{k-1}x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) 2^{-k}$ et $v_n(x) = u_n(x) + 2^{-n}$.

1. Démontrer que la suite $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique.

2. Démontrer que les deux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et prennent leurs valeurs dans $D_2 \cap [0, 1]$.

3. Vérifier que $E(2^n x) = 2^n u_n(x)$ et en déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) \leqslant x < v_n(x).$$

4. Quelle est la limite commune des suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. Montrer que $(\alpha_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre et que

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x) 2^{-k}.$$

6. En déduire que pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0, 1[$, il existe une unique suite dyadique propre $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k}.$$

On note alors

$$x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 ...}$$

Cette nouvelle représentation de x est appelée la *représentation dyadique propre* de x. Si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang, on dit que la représentation dyadique de x est finie.

7. Si $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dyadique propre, on note $x = s(d)$ et $d' = (d_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Justifier que $d_1 = E(2x)$ et $s(d') = 2x - d_1$.
En déduire un algorithme qui prend en entrées un nombre réel $x \in [0, 1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste des n premiers chiffres du développement dyadique propre de x. On admettra l'existence d'une fonction *floor* qui renvoie la partie entière de son argument.

XIII. Démontrer que $D_2 \cap [0, 1]$ est dense dans $[0, 1]$. En déduire que D_2 est dense dans $\mathbb{R}$.

XIV. Démontrer que $\mathbb{R} \backslash D_2$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser la question VII.

XV. Soit x un nombre réel dans l'intervalle $\in [0, 1[$ dont un développement dyadique, propre ou impropre, est $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$

1. Quel est le développement dyadique de $1 - x$?

2. On suppose que $2x \in [0, 1[$. Quel est le développement dyadique de $2x$? Plus généralement, quel est le développement dyadique de $2^l x$, lorsque l est un entier relatif et que $2^l x \in [0, 1[$?

3. Donner le développement dyadique de $\frac{2}{3}$.

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

XVI. Dans cette question, θ désigne un nombre réel strictement positif. On pose

$$c_n = \cos(n\pi\theta), \qquad s_n = \sin(n\pi\theta).$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} c_{n+1} + c_{n-1} &= 2c_n \cos(\pi\theta), \\ c_{n+1} - c_{n-1} &= -2s_n \sin(\pi\theta), \\ c_n^2 + s_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si θ est un entier relatif pair.
Indication : on pourra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $\cos(\pi\theta)$.

XVII. On s'intéresse à présent à la suite $(c_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = c_{2^n} = \cos(2^n\pi\theta).$$

1. On suppose (dans cette question uniquement) que θ est un nombre dyadique. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \frac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe un nombre dyadique x tel que $\theta = x + \frac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

5. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, quelles sont les seules valeurs possibles pour le réel ℓ ?

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définissant le développement dyadique propre de $\theta - E(\theta)$. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, il existe un entier relatif k_n et un réel ε_n appartenant à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ tels que :

$$2^n\theta = 2k_n + a_n + \frac{a_{n+1}}{2} + \varepsilon_n.$$

7. Démontrer que :
— si $a_n = a_{n+1}$, alors $u_n \geqslant 0$;
— si $a_n \neq a_{n+1}$, alors $u_n \leqslant 0$.
Puis que :
— si $u_n > 0$, alors $a_n = a_{n+1}$;
— si $u_n < 0$, alors $a_n \neq a_{n+1}$.

8. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell > 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_n = 0$. En déduire que θ est un nombre dyadique.

9. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\ell < 0$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $a_{n+1} \neq a_n$. En déduire que $\theta - \frac{1}{3}$ ou $\theta - \frac{2}{3}$ est un nombre dyadique.

XVIII. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On justifiera ce résultat et on précisera le cas échéant la valeur de sa limite.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On souhaite crypter des messages, lettre à lettre. Pour écrire ces messages, on utilise 29 caractères différents : les 26 lettres de l'alphabet et les trois symboles espace, virgule et point. Pour faciliter le travail de cryptage, on code chacun de ces 29 caractères par un entier :

.	␣	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	,
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

On note R l'ensemble des entiers utilisés dans ce cryptage, c'est-à-dire l'ensemble $[\![0, 28]\!]$. Pour tout entier naturel k non nul, on note f_k l'application de R dans R qui à tout x de R associe le reste de la division euclidienne de x^k par 29.

Ces fonctions f_k, appelées *fonctions de cryptage*, sont utilisées pour crypter des messages.

Partie A : premiers essais

Albert souhaite utiliser comme fonction de cryptage l'application f_3. Benoît propose d'utiliser f_7. Camille choisit d'utiliser f_{19}.

I. Que devient la lettre E par la méthode de cryptage d'Albert ?

II. Montrer que, quelle que soit la fonction de cryptage f_k choisie, les symboles espace et point sont inchangés.

III. Un élève de troisième propose d'utiliser un tableur pour calculer les valeurs de f_k. Il prépare la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	...	AC	AD	AE
1		.	␣	A	B	...	Z	,	
2	x	0	1	2	3	...	27	28	Exposant k
3	$f_k(x)$	0	1						3

Dans la cellule D3, il entre la formule =MOD(D2^AE3;29). Comment modifier cette formule afin de pouvoir la dupliquer en utilisant la poignée de recopie, sachant que le tableau doit rester correct lorsque le contenu de la cellule AE3 est modifié ?

On rappelle que MOD(a;b) renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

IV. Benoît utilise la feuille de calcul précédente pour son cryptage avec f_7. Il obtient le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f_k(x)$	0	1	12	12	28	28	28	1	17	28	17	12	17	28	12

x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f_k(x)$	17	1	12	17	12	1	12	28	1	1	1	17	17	28

Crypter les mots CLE et LUC. Que constate t-on ?

V. Quelle propriété doit vérifier la fonction f_k pour assurer le décryptage ?

VI. Camille utilise la feuille de calcul de la question **III.** avec $k = 19$. Dans les cellules allant de E3 à AD3, il s'affiche ♯NOMBRE !. Comment expliquer ce résultat ? On verra dans la partie C comment contourner ce problème.

Partie B : choix de la fonction de cryptage

On se propose dans cette partie de déterminer les valeurs de k pour lesquelles la fonction de cryptage f_k permet d'assurer le décryptage.

VII. On fixe un nombre premier p. Soit a un entier (relatif) tel que p ne divise pas a. Le but de cette question est de **démontrer** l'égalité suivante, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1[p].$$

On désigne par A l'ensemble $\{a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a\}$.

1. Soit k un entier relatif. Montrer que p divise ka si, et seulement si, p divise k. En déduire que p ne divise aucun élément de A.

2. Pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, on note α_i le reste modulo p de l'entier ia.

a. Établir que ces restes sont tous non nuls et deux à deux distincts.

b. En déduire que $\{\alpha_i, i \in [\![1, p-1]\!]\} = [\![1, p-1]\!]$.

3. On appelle P le produit de tous les éléments de A. Établir que $P = a^{p-1}(p-1)!$ et que $P \equiv (p-1)![p]$.

4. En déduire que pour tout entier relatif a premier avec p , $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

5. Que peut-on en déduire pour f_{28} et f_{29} ?

6. Soit k et l deux entiers naturels non nuls. Montrer que si $k \equiv l[28]$, alors $f_k = f_l$.

VIII. Dans cette question x désigne un entier naturel premier avec 29 .

1. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel non nul k tel que $x^k \equiv 1[29]$, et que cet entier k est inférieur ou égal à 28. Cet entier k est appelé *ordre de* x et est noté $o(x)$.

Définition. Soit x un entier premier avec 29.
On dit que x est primitif modulo 29 si $o(x) = 28$.

2. Soit k un entier naturel. Montrer que $x^k \equiv 1[29]$ si et seulement si $o(x)$ divise k.

3. En déduire que $o(x)$ est un diviseur de 28.

4. Écrire un algorithme permettant de calculer l'ordre d'un nombre entier x premier avec 29.

5. **a.** Déterminer l'ensemble des diviseurs de 28.

b. Montrer que si $x^{14} \equiv 1[29]$ ou $x^4 \equiv 1[29]$, alors l'ordre $o(x)$ ne peut pas valoir 28.

c. Montrer que si $x^{14} \not\equiv 1[29]$ et $x^4 \not\equiv 1[29]$, alors $o(x) = 28$.

d. En déduire que 2 est primitif modulo 29.

IX. On rappelle que si p est un nombre premier, l'ensemble $\{\overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid \overline{x} \neq \overline{0}\}$ muni de la loi $\overline{\times}$ induite par la multiplication de $\mathbb{Z}$ est un groupe. En utilisant les résultats de la question **VIII.**, vérifier que, pour $p = 29$, ce groupe est cyclique et donner un générateur de ce groupe.

X. On considère l'application φ définie sur $S = [\![1, 28]\!]$ et à valeurs dans S qui à tout entier $k \in S$ associe $\varphi(k) = \beta_k$, où β_k désigne le reste de la division euclidienne de 2^k par 29.

1. Justifier que φ est bien définie.

2. Soient $k \leqslant k'$ deux éléments de S. Établir que $\varphi(k) = \varphi(k')$ si et seulement si 29 divise $2^{k'-k} - 1$.

3. En déduire que φ est injective, puis que φ est bijective.

4. En déduire que, pour tout élément de $y \in S$, il existe un unique $x \in S$ tel que $y \equiv 2^x[29]$.

XI. Soit k un entier naturel non nul fixé. Étant donné $y \in S$, on cherche à trouver $z \in R$ tel que $z^k \equiv y[29]$.

1. Établir que 29 ne peut diviser z et que l'on peut se ramener à chercher z dans S.

2. Soit z un élément de S et t (respectivement x) l'unique élément de S tel que $z \equiv 2^t[29]$ (respectivement $y \equiv 2^x[29]$). Démontrer que $z^k \equiv y[29]$ si et seulement si $kt - x$ est divisible par 28.

3. On considère l'équation diophantienne $(*)$ $ak + 28b = 1$, où les inconnues a et b sont des entiers relatifs.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante (C) pour que $(*)$ admette des solutions.

b. On suppose cette condition (C) satisfaite. À partir d'une solution particulière (a_0, b_0), donner alors toutes les solutions de $(*)$.

c. On suppose cette condition (C) satisfaite. Établir que $(*)$ a une unique solution (a_1, b_1) pour laquelle $a_1 \in S$.

4. En déduire que si k et 28 sont premiers entre eux alors $f_{a_1} \circ f_k(w) = f_k \circ f_{a_1}(w) = w$ pour tout $w \in R$.

5. Que conclure pour f_k ?

XII. Montrer que tout message crypté par la fonction f_3 peut être décrypté à l'aide de la fonction f_{19}.

XIII. Quelles sont les valeurs de k permettant le décryptage de tout message ayant été crypté par f_k ? Justifier votre réponse.

Partie C : différents procédés de calcul de f_{19}

On décrit dans cette partie trois méthodes pour calculer f_{19} à l'aide d'un tableur.

XIV. Première méthode. On souhaite compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	...	AC	AD
1		.		A	B	...	Z	,
2	x	0	1	2	3	...	27	28
3	$f_2(x)$	0	1					
4	$f_3(x)$	0	1					
⋮	⋮	⋮	⋮					
20	$f_{19}(x)$	0	1					

1. Quelle formule doit-on écrire en D3 pour remplir le tableau en utilisant la poignée de recopie ?

2. Pour remplir chaque colonne, combien de multiplications et combien de divisions euclidiennes par 29 sont-elles effectuées ?

XV. Seconde méthode. On souhaite compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	...	AC	AD
1		.		A	B	...	Z	,
2	x	0	1	2	3	...	27	28
3	$f_2(x)$	0	1					
4	$(f_2 \circ f_2)(x)$	0	1					
5	$(f_2 \circ f_2 \circ f_2)(x)$	0	1					
6	$(f_2 \circ f_2 \circ f_2 \circ f_2)(x)$	0	1					
7								

1. Quelle formule doit-on écrire en D3 pour remplir le tableau en utilisant la poignée de recopie ?
2. En constatant que $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$, montrer que pour tout $x \in R$,

$$f_{19}(x) \equiv (f_2 \circ f_2 \circ f_2 \circ f_2)(x) \times f_2(x) \times x \ [29].$$

3. Quelle formule doit-on écrire en D7 pour remplir la ligne 7 en utilisant la poignée de recopie et obtenir ainsi f_{19} ?
4. Pour remplir chaque colonne, combien de multiplications et combien de divisions euclidiennes par 29 sont-elles effectuées ?

XVI. Troisième méthode. On souhaite compléter la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	...	AC	AD
1		.		A	B	...	Z	,
2	x	0	1	2	3	...	27	28
3	$f_3(x)$	0	1					
4	$(f_3 \circ f_3)(x)$	0	1					
5								

1. Quelle formule doit-on écrire en D3 pour remplir le tableau en utilisant la poignée de recopie ?
2. En constatant que $19 = 2 \times 3^2 + 3^0$, donner une formule permettant de calculer $f_{19}(x)$ à partir de la feuille de calcul précédente.
3. Quelle formule doit-on écrire en D5 pour remplir la ligne 5 en utilisant la poignée de recopie et obtenir ainsi f_{19} ?
4. Pour remplir chaque colonne, combien de multiplications et combien de divisions euclidiennes par 29 sont-elles effectuées ?

XVII. Laquelle de ces trois méthodes vous semble la plus performante ?

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

Si z est un nombre complexe, son conjugué est noté $\overline{z}$.

Partie A : constructions à la règle et au compas

On se place dans un plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), qu'on identifie avec le plan complexe $\mathbb{C}$. On construit des points de $\mathcal{P}$ à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas de la façon suivante :

- au départ, seuls O, I et J sont construits ;
- à chaque étape, on peut :
  - construire le cercle de centre A et de rayon BC si A, B et C sont des points déjà construits ;
  - construire la droite (AB) si A et B sont des points déjà construits.

On obtient ainsi de nouveaux points, intersections des cercles et des droites qui ont été construits. Ces points pourront être utilisés aux étapes suivantes. Les droites, cercles et points ainsi obtenus sont dits *constructibles à la règle et au compas.*

Soit x un nombre réel. On dit que x est un nombre *constructible* s'il est l'abscisse dans le repère (O, I, J) d'un point constructible.

I. Dans toutes les questions qui suivent, on attend à la fois la représentation d'une construction à la règle et au compas laissant apparaître les traits de construction et la rédaction d'un programme de construction tel qu'il figurerait comme trace écrite dans les cahiers des élèves.

1. On suppose que A et B sont deux points distincts constructibles à la règle et au compas. Montrer que la médiatrice de $[AB]$ et le milieu de $[AB]$ sont constructibles à la règle et au compas.

2. On suppose que A, B et C sont trois points constructibles à la règle et au compas, avec $A \neq B$. Montrer que la droite perpendiculaire à (AB) passant par C est constructible à la règle et au compas.

3. On suppose que A, B et C sont trois points constructibles à la règle et au compas, avec $A \neq B$. Montrer que la droite parallèle à (AB) passant par C est constructible à la règle et au compas.

4. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites constructibles à la règle et au compas, sécantes en un point A. Montrer que les bissectrices de ces deux droites sont constructibles à la règle et au compas.

On pourra désormais utiliser ces constructions sans en préciser tous les détails.

II. Soit M un point constructible à la règle et au compas. On note $(x; y)$ ses coordonnées dans le repère (O, I, J). Montrer que x et y sont des nombres constructibles.

III. Soit x un nombre réel constructible. Montrer que les points de coordonnées $(x; 0)$ et $(0; x)$ dans le repère (O, I, J) sont constructibles à la règle et au compas.

IV. Soient x et y deux nombres réels constructibles strictement positifs.

1. Montrer que $-x$ est un nombre réel constructible. La réponse à cette question doit être rédigée telle que vous la présenteriez à une classe de collège.
2. Montrer que $x+y$ et $x-y$ sont constructibles. La réponse à cette question doit être rédigée telle que vous la présenteriez à une classe de collège.
3. En utilisant les points J, $A(x;0)$ et $B(0;y)$ et la droite parallèle à (AJ) passant par B, montrer que xy est constructible. La réponse à cette question doit être rédigée telle que vous la présenteriez à une classe de collège.
4. Montrer que $\dfrac{x}{y}$ est constructible.

V. Montrer que si x et y sont des nombres réels constructibles, alors $x+y$, $x-y$, xy et, si y est non nul, $\dfrac{x}{y}$ sont des nombres constructibles.

VI. Soit x un nombre réel constructible strictement positif.

1. Montrer que le point $A(1+x;0)$ est constructible à la règle et au compas.
2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$ est constructible à la règle et au compas.
3. Soit B le point d'intersection d'ordonnée positive de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (OI) passant par I. Montrer que B est constructible à la règle et au compas.
4. Soit $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}})$. Exprimer $\tan(\theta)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de BI et de x. En déduire BI.
5. Montrer que $\sqrt{x}$ est un nombre constructible.

VII. Montrer que tous les nombres rationnels sont constructibles.

VIII. Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt[4]{2}$ sont des nombres constructibles. Proposer une construction à la règle et au compas des points de coordonnées $(\sqrt{2};0)$ et $(\sqrt[4]{2};0)$.

Partie B : polygones réguliers

Dans toute cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Soit $M_0 \dots M_{n-1}$ un polygone. On dit qu'il est régulier s'il existe un point O, appelé le centre du polygone, tel que

$$OM_0 = OM_1 = \dots = OM_{n-1},$$
$$(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) = \dots = (\widehat{\overrightarrow{OM_{n-2}}, \overrightarrow{OM_{n-1}}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_0}}).$$

IX.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$.
2. Montrer que les points d'affixe les solutions de l'équation $z^n = 1$ forment un polygone régulier.

X. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note M_k le point d'affixe $e^{\frac{2i\pi k}{n}}$. En particulier, $M_0 = I$. Soit B le point d'affixe $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

1. Montrer que si M_1 est constructible à la règle et au compas, alors B est constructible à la règle et au compas.

2. Montrer que si B est constructible à la règle et au compas, alors M_1 est constructible à la règle et au compas.

XI. Montrer que $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont constructibles à la règle et au compas si, et seulement si, B est constructible à la règle et au compas.

XII. En utilisant le point B, montrer que $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont constructibles à la règle et au compas lorsque $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 6$. Dans chacun de ces cas, on proposera une construction des points $M_0, \dots, M_{n-1}$.

XIII. On suppose maintenant $n = 5$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, et on note $\alpha = \omega + \overline{\omega}$.

1. Justifier que $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

3. Montrer que $\alpha = \omega + \omega^4$ et que $\alpha^2 = \omega^2 + \omega^3 + 2$.

4. En déduire que $-1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ puis que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

5. En déduire que $M_0, \dots, M_4$ sont des points constructibles.

XIV. On considère la construction suivante.

- Tracer le cercle $\mathbb{U}$ de centre O et de rayon 1. Soit K le point d'affixe -1.
- Construire le milieu B de $[KO]$ et tracer le cercle Γ de centre B et de rayon BJ. On note C le point intersection de Γ et de $[OI]$.
- Construire le milieu de D de $[OC]$.

1. Calculer l'affixe de D.

2. En déduire une construction du pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ à la règle et au compas.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on note le conjugué de z par $\overline{z}$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $GL_n(\mathbb{C})$.

Partie A : rotations et translations du plan

On se place dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct.

Notations.
Soit θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π et Ω un point de $\mathcal{P}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $r_{\Omega,\theta}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

I. Question de cours. Soient θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π, Ω un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. L'affixe de Ω est notée ω et l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est notée $z_{\overrightarrow{u}}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$, d'affixe z. Déterminer l'affixe z' de l'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$. Déterminer l'affixe z'' de l'image de M par $r_{\Omega,\theta}$.

II. Soient a un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors f est une translation dont on précisera le vecteur.

2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

a. Montrer que f possède un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. Montrer que l'image par f du point M d'affixe z est le point d'affixe

$$a(z - \omega) + \omega.$$

c. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

III. Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes de module 1 et b_1 et b_2 deux nombres complexes. On considère l'application f_1, respectivement f_2, de $\mathcal{P}$ dans lui-même, envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe $a_1 z + b_1$, respectivement $a_2 z + b_2$.

1. Soit $f = f_1 \circ f_2$. Pour tout point M d'affixe z, calculer l'affixe de $f(M)$.

2. Montrer que f est une translation ou une rotation.

IV. Soient r_1 la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.

V. On considère l'ensemble G formé des rotations de $\mathcal{P}$ et des translations de $\mathcal{P}$. Montrer que G est un groupe pour une loi que l'on précisera.

Partie B : une construction géométrique

On se place de nouveau dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$. On a montré dans la partie précédente que, sous certaines conditions, la composée de deux rotations est une rotation. On cherche ici à construire le centre de cette rotation.

Notations.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. La symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ est notée $s_{\mathcal{D}}$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{P}$, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

VI. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan, sécantes en un point Ω. On désigne par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, respectivement. On considère l'application $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

1. Montrer que Ω est un point fixe de f.
2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de Ω. Soient $M' = s_{\mathcal{D}_1}(M)$ et $M'' = s_{\mathcal{D}_2}(M')$. Montrer que les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1})$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$ sont égaux. On montrerait de même que les angles $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''})$ sont égaux.
3. Montrer que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$.
4. Montrer que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$.
5. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

VII. Soient r_1 et r_2 deux rotations, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

1. Déterminer deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que $r_1 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.
2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.
3. On suppose $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en un point Ω. Montrer qu'alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
4. Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
5. Que se passe t-il si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ?

Partie C : structure des quaternions

Soient a et b deux nombres complexes. On note $M(a, b)$ la matrice complexe suivante :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(a, b)$ est appelée un quaternion. On considère en particulier les quaternions suivants :

$$E = M(1,0), \qquad I = M(i,0), \qquad J = M(0,1), \qquad K = M(0,i).$$

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(i, 0)$ avec la matrice identité d'ordre 2, $I_2 = E$.

On note $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

VIII. **1.** Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dont une base est (E, I, J, K).

En conséquence, tout quaternion q s'écrit de manière unique $q = xE+yI+zJ+tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, calculer $M(a, b)M(a', b')$. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

IX. **1.** Calculer les produits deux à deux des matrices E, I, J et K. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.

2. La multiplication dans $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

X. Montrer que tout quaternion $q = M(a, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, est un élément de $GL_2(\mathbb{C})$ dont l'inverse q^{-1} est un quaternion.

XI. Montrer que $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H}, qr = rq\} = \{xE \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

Soit $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On définit le quaternion conjugué de q, noté q^*, par :

$$q^* = xE - yI - zJ - tK.$$

On définit la partie réelle de q, notée $\mathcal{R}e(q)$, par $\mathcal{R}e(q) = xE$.
On définit la partie imaginaire de q, notée $\mathcal{I}m(q)$, par $\mathcal{I}m(q) = yI + zJ + tK$.
On définit l'ensemble des quaternions purs, noté $\mathbb{H}_{pur}$, par $\mathbb{H}_{pur} = \{q \in \mathbb{H} \mid \mathcal{R}e(q) = 0\}$.

XII. **1.** Soit q un quaternion. Montrer que q^* est la transposée de la matrice obtenue en conjugant tous les coefficients de q.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $(qr)^* = r^*q^*$.

XIII. Pour tout quaternion q, on pose $N(q) = qq^*$.

1. Montrer que, pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $N(q) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E$.

2. Montrer que, pour tous quaternions q, r, $N(qr) = N(q)N(r)$.

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

On admet qu'on définit une norme euclidienne sur $\mathbb{H}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q = xE + yI + zJ + tK & \mapsto & ||q|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{cases}$$

XIV. Quel est le produit scalaire associé à cette norme euclidienne ?

XV. **1.** Montrer que, pour tout quaternion q, $N(q) = ||q||^2 E$.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $||qr|| = ||q|| \times ||r||$.

3. En déduire que pour tout quaternion non nul q, $||q^{-1}|| = \dfrac{1}{||q||}$.

XVI. On considère l'application suivante :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{pur} \\ \overrightarrow{q} = (y, z, t) & \mapsto & q = yI + zJ + tK. \end{array} \right.$$

Le quaternion pur $\psi(\overrightarrow{q})$ est appelé quaternion pur associé au vecteur $\overrightarrow{q}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et est supposé orienté. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. De plus, $\mathbb{H}_{pur}$ est muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que ψ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^3$,

$$||\psi(\overrightarrow{q})|| = ||\overrightarrow{q}||.$$

2. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{pur}$, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\mathcal{R}e(q_1 q_2) = -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E$ et que $\mathcal{I}m(q_1 q_2) = \psi(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2})$, où $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$.

3. Soit $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $\mathcal{R}e(q^2)$ et $\mathcal{I}m(q^2)$. En déduire q^2.

4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $(aE + bq)(cE + dq)$.

5. Soient q_1 et q_2 deux quaternions purs, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle = 0$ si et seulement si $q_1 q_2 + q_2 q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectorielles

On note $U = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = E\}$. Les éléments de U sont appelés quaternions unitaires.

XVII. Montrer que U est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

XVIII. Soit $p \in U$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel θ et un quaternion $u \in U \cap \mathbb{H}_{pur}$ tel que

$$p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u.$$

2. Vérifier que $p^{-1} = p^* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$.

XIX. Soit $p \in U$. On définit l'application suivante :

$$r_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & pqp^{-1}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que r_p est une application linéaire.

2. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $||r_p(q)|| = ||q||$.

3. Soient p_1 et p_2 deux éléments de U. Montrer que $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1 p_2}$. En déduire que pour tout $p \in U$, r_p est une bijection d'inverse $r_{p^{-1}}$.

4. Montrer que r_p est égale à l'identité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $p = E$ ou $p = -E$.

5. Soient p_1 et p_2 deux quaternions unitaires. Déduire de la question précédente que $r_{p_1} = r_{p_2}$ si et seulement si $p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.

XX. On suppose maintenant que p est un quaternion unitaire différent de E et de $-E$. D'après la question XVIII. 1., le quaternion p s'écrit sous la forme $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$, où θ est un nombre réel u est un quaternion pur unitaire. On associe à u le vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'application ψ définie dans la question ψ définie dans la question XVI.
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note v et w les quaternions purs associés aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Que peut-on dire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?
2. Montrer que $uv = -vu = w$, $uw = -wu = -v$, $u^2 = -E$ et que $u^3 = -u$.
3. Calculer $r_p(u)$, $r_p(v)$ et $r_p(w)$.
4. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ notée R, dont on précisera l'axe et l'angle, telle que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXI. Soit R une rotation vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'axe la droite D dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{d}$ et d'angle ϕ. Montrer qu'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXII. **Application**. Soient R_1 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe engendré par $(1, -1, -1)$ et R_2 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π et d'axe engendrée par $(0, 1, 0)$. Montrer que $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$ sont des rotations dont on précisera les axes et les angles.

Problème n° 2

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\binom{n}{k}$.

On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

3. Soit $x \in]-1\,;1[$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

4. Soit $x \in]-1\,;1[$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\binom{n}{1}$ et de $\binom{n}{2}$.

III. Application : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur Ω, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « le joueur A_1 touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

VI. En déduire la loi de X_1.

VII. **1.** Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.

2. Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) = \mathbb{P}(X_1 > n).$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

IX. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$.

X. Que vaut $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$?

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur A_1 pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.
On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1 = n)}(G = k)$. On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1} p^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}$.

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q \leqslant 1$.

XIII. Montrer que pour tout couple (m, n) d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n+1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.

5. En déduire que q est différent de 1.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y + 1$.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

XVIII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1-\lambda_n)$?

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n$?

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = c$. Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.

3. Montrer que c est non nul.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A : logarithme de base a

Rappel. On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0, +\infty[$, dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$.

I. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \frac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

II. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

III. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$.

IV. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

V. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = r f_a(x)$.
Indication : on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

VI. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

VII. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

VIII. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

IX. Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes f_a ?

Partie B : logarithme décimal

X. Montrer qu'il existe un unique logarithme f_a tel que $f_a(10) = 1$. Ce logarithme est noté Log et est appelé logarithme décimal.

XI. Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède n chiffres. Déterminer la partie entière de $\mathrm{Log}(N)$.

XII. Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

> **1.** Combien le nombre 4^{2019} possède t-il de chiffres ?
>
> **2.** Le niveau sonore L (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité I (en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$) selon la formule
>
> $$L = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$
>
> où $I_0 = 10^{-12}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
>
> **a.** Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de $10^{-5}\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.
>
> **b.** Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
>
> **3.** Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

XIII. Montrer que pour tout nombre réel $x \neq -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

XIV. En déduire que pour tout nombre réel $x > -1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t.$$

XV. On suppose que $x \geqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

XVI. On suppose que $-1 < x \leqslant 0$. Montrer que

$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

XVII. En déduire que, si $-1 < x \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln(1+x)$. On pourra raisonner par disjonction de cas.

XVIII. Justifier que la série de terme général $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ diverge lorsque $|x| > 1$.

XIX. À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de n pour laquelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-8} près pour :

1. $x = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = \dfrac{1}{8}$.

3. $x = 1$.

XX. **1.** Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit p un entier naturel non nul. On considère $R_p = \displaystyle\sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Montrer que

$$R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit N un entier naturel non nul. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que si $0 < p \leqslant N$,

$$\int_p^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+a)^2} \leqslant \int_{p-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul p,

$$\frac{1}{4p+4} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que R_p est équivalent à $\dfrac{1}{4p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

XXI. On se propose de calculer des approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. Exprimer $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de $\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$.

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à 10^{-8} près suivantes :

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \qquad \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Donner la précision de ces résultats.

XXII. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

XXIII. En déduire que si $x \in [0,1[$, alors

$$\left|\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

XXIV.

1. Quelle valeur de x doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de $\ln(2)$? de $\ln(3)$?

2. À l'aide de ces valeurs de x, donner une valeur de n permettant d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ à 10^{-8} près.

3. Comparer cette méthode d'approximation de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ avec celle de la question XXI.

XXV. On se propose de calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout nombre entier $n > 1$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de $\ln(p)$ pour p nombre premier.

2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de $\ln(n)$ pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 20$.

Problème n° 2

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle que, pour tout élément x non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x = \frac{a}{b}$. Le quotient $\frac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de x. Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\frac{0}{1}$.

Partie A : Somme des cancres

Définition. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d sont des entiers naturels, b et d sont non nuls, a et b sont premiers entre eux, c et d sont premiers entre eux). La somme des cancres de x et y est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

I. **Question de cours**. Soient a, b, n trois entiers relatifs, a et b étant non nuls. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(a, b + na)$.

II. Soient x et y deux rationnels positifs.

1. Montrer que $x \oplus y$ est un rationnel positif.

2. On note $\frac{a}{b}$ la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y. La FFI de $x \oplus y$ est-elle toujours $\frac{a+c}{b+d}$?

III. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus 0 = x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus x = x$.

3. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus y = y \oplus x$.

4. Pour tous $x, y, z, \in \mathbb{Q}^+$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

5. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$.

6. Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$, pour tout entier naturel n, $(n + x) \oplus (n + y) = n + (x \oplus y)$.

IV. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{Q}^+$.

1. Montrer que $x \oplus y = x$ si, et seulement si, $x = y$.

2. Montrer que si $x < y$, alors $x < x \oplus y < y$.

V. Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère (O, I, J). Pour $x \in \mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$, on note M_x le point de coordonnées (b, a).

1. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que O, $M_{x \oplus y}$ et le milieu de $[M_x M_y]$ sont alignés.
2. Qu'est la droite $(OM_{x\oplus y})$ pour le triangle OM_xM_y ?

VI. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a > c$ et $b < d$. En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle OM_xM_y est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

Partie B : suites de Farey

Définition : pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite de Farey d'ordre n est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à n. On note F_n cette suite. Par exemple :

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right),$$
$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right).$$

VII. Déterminer F_4, F_5 et F_6.

VIII. Soit $x \in \mathbb{Q}^+$ et soit n un entier naturel non nul. Montrer que x est un terme de la suite F_n si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{N}$, b non nul, tels que $x = \frac{a}{b}$ et $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

IX. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les termes de F_n sont aussi des termes de F_{n+1}.

X. Montrer que si x est un terme de la suite F_n alors $1 - x$ également.

XI. On considère l'application suivante :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{cases}$$

1. Montrer que θ est injective.
2. Montrer que θ n'est pas surjective.
   Indication : on pourra montrer que $(2, 2)$ n'appartient pas à $\theta(\mathbb{Q}^+)$.
3. Soit x un élément de la suite F_n, non nul. Montrer que $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.
4. On note f_n le nombre de termes de F_n. Montrer que $f_n \leqslant n^2 + 1$ et que l'égalité n'est satisfaite que si $n = 1$.

XII. Soit n un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de n est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \in [\![1, n]\!],\ \text{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

XIII. Soit n un entier naturel non nul et soient x et y deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}. On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de F_n.

1. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $x = \dfrac{k}{n+1}$ et $y = \dfrac{k+1}{n+1}$.

2. Montrer que $x < \dfrac{k}{n} < y$.

3. Montrer que si x et y sont deux termes consécutifs de la suite F_{n+1}, alors au moins l'un des deux est un élément de F_n.

XIV. Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) : « si x et y sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey F_n, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre m strictement supérieur à n. »

1. Démontrer (P_1).

2. On suppose que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, la propriété (P_n) est vraie. Soit alors x et y deux termes consécutifs (dans cet ordre) de F_{n+1}, dont les FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$. On rappelle que, dans ce cas, x ou y est un élément de F_n.

a. Montrer que si x et y sont des éléments de F_n, alors $bc - ad = 1$ et $x \oplus y$ est la première fraction qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à $n + 1$.

b. On suppose dans tout ce qui suit que x est un terme de F_n et que y n'est pas un terme de F_n. Soit z le successeur de x dans F_n et $z = \dfrac{r}{s}$ la FFI de z. Montrer que $\dfrac{a+r}{b+s}$ est une fraction irréductible comprise entre x et z.

c. Montrer que $x < y < z$ puis que $y = x \oplus z$.

d. En déduire que $c = a + r$ et $d = b + s$.

e. Déduire que $bc - ad = rd - sc = 1$.

f. Soit $\dfrac{p}{q}$ la première fraction irréductible qui apparaît entre x et y dans une suite de Farey F_m d'ordre strictement m supérieur à $n+1$. On pose $u = qc - pd$ et $v = pb - aq$. Montrer que u et v sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv &= p, \\ bu + dv &= q. \end{cases}$$

g. Déduire que $x \oplus y$ apparaît dans une suite $F_{m'}$ avec $n + 1 < m' \leqslant m$ et que

$$x < x \oplus y < y.$$

h. En déduire que $x \oplus y = \dfrac{p}{q}$.

3. Conclure.

XV. Applications.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey F_n, alors $\dfrac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible.

2. Soient x, y et z trois termes consécutifs d'une suite de Farey F_n de FFI respectives sont $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$. Montrer que $bc - ad = de - fc$ puis que $y = x \oplus z$.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i,j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.
Pour n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n.
On désigne par $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée.
On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$ la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, on note $\|\vec{u}\|$ sa norme euclidienne.

Définitions

Un point pondéré est un couple (M, α), où M est un point de $\mathcal{P}$ et α un nombre réel.
Pour tout entier naturel n non nul, un système de $n+1$ points pondérés est un $(n+1)$-uplet $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$. Le poids total de ce système de points pondérés est

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Partie A : barycentres

I. Existence et caractérisation

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés de poids total α.

1. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\vec{\mathcal{P}}$ qui, à tout **point** M de $\mathcal{P}$ associe le **vecteur**

$$f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i}.$$

a. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle

$$f(N) = f(M) + \alpha \overrightarrow{NM}.$$

b. Démontrer que, si $\alpha \neq 0$, alors f est injective et surjective.

c. En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

2. On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé barycentre du système de points pondérés $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. On note

$$G = \operatorname{bar}((P_0, \alpha_0), \ldots, (P_n, \alpha_n)).$$

3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on note G le barycentre du système $((P_i, \alpha_i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

II. Barycentre de deux points

Soient P_0, P_1 deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1. Quel est le barycentre du système de points pondérés $((P_0, 1), (P_1, 1))$?

2. Démontrer que, pour tout nombre réel t, le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$ appartient à la droite (P_0P_1).

3. Soit M un point de la droite (P_0P_1).

a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel t tel que M soit le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1-t))$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur t pour que M soit un point du segment $[P_0P_1]$.

III. Propriétés du barycentre

1. Homogénéité

a. Soit λ un réel non nul. Montrer que le barycentre du système de points pondérés $((P_0, \lambda\alpha_0), (P_1, \lambda\alpha_1), \cdots, (P_n, \lambda\alpha_n))$, de poids total supposé non nul, est égal au barycentre du système de points pondérés $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), \cdots, (P_n, \alpha_n))$.

b. Soient trois points P_0, P_1, P_2 formant un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe deux triplets $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ de nombres réels, chacun de somme non nulle, tels que les barycentres des systèmes $((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2))$ et $((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2))$ soient égaux. On note alors M ce point.
Démontrer que $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ et $(\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2)$ sont proportionnels.
Indication : on pourra justifier que $(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$ est une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et décomposer le vecteur $\overrightarrow{P_0M}$ dans cette base de deux façons différentes.

2. Associativité simple

a. *Un cas particulier.*
Étant donnés trois points A, B, C du plan $\mathcal{P}$ et trois réels α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$, on note $m_1 = \alpha + \beta$ et G_1 le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta))$.

i. Démontrer que le barycentre du système $((G_1, m_1), (C, \gamma))$ est égal au barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$.

ii. En utilisant ce résultat, démontrer que les trois médianes d'un triangle non aplati sont concourantes en un point situé aux deux tiers de chacune à compter du sommet associé.

b. *Cas général.*
Soit n un entier naturel non nul, $I = [\![0, n]\!]$ et r un entier naturel non nul inférieur ou égal à n. On suppose que $I = J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_r$, les J_k ($k \in [\![0, r]\!]$) étant non vides et deux à deux disjoints. On considère un système de points

pondérés $((P_i,\alpha_i)\ ;\ i\in I)$ avec $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\neq 0$. Pour tout $k\in[\![0,r]\!]$, on suppose que $\beta_k=\sum_{i\in J_k}\alpha_i\neq 0$ et on note Q_k le barycentre du système $((P_i,\alpha_i)\ ;\ i\in J_k)$.

Démontrer que $\sum_{k=0}^{r}\beta_k\neq 0$ et que

$$\mathrm{bar}((P_i,\alpha_i)\ ;\ i\in[\![0,n]\!])=\mathrm{bar}((Q_k,\beta_k)\ ;\ k\in[\![0,r]\!]).$$

3. Associativité double

On considère deux entiers naturels p et n, un $n+1$-uplet $(P_0,\dots,P_n)$ de points de $\mathcal{P}$ et deux familles finies de réels $(\alpha_{i,j})_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\0\leqslant j\leqslant n}}$ et $(\beta_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ vérifiant

$$\forall i\in[\![0,p]\!],\ \sum_{j=0}^{n}\alpha_{i,j}=1\ \text{et}\ \sum_{i=0}^{p}\beta_i=1.$$

Pour tout $i\in[\![0,p]\!]$, on note B_i le barycentre du système de points pondérés $((P_j,\alpha_{i,j})\ ;j\in[\![0,n]\!])$ et on note G le barycentre du système de points pondérés $((B_i,\beta_i)\ ;\ i\in[\![0,p]\!])$.

Démontrer que $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)=1$ et que G est le barycentre du système de points pondérés $\left(\left(P_j,\sum_{i=0}^{p}\beta_i\alpha_{i,j}\right)\ ;\ j\in[\![0,n]\!]\right)$.

IV. Barycentres et applications affines

Soit g une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. On rappelle que sa partie linéaire φ_g est l'unique endomorphisme de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que, pour tous points A, B de $\mathcal{P}$,

$$\overrightarrow{g(A)g(B)}=\varphi_g(\overrightarrow{AB}).$$

Soit $((P_0,\alpha_0),\dots,(P_n,\alpha_n))$ un système de points pondérés de poids total non nul. Démontrer que l'image par g du barycentre du système $((P_0,\alpha_0),\dots,(P_n,\alpha_n))$ est le barycentre du système de points pondérés $((g(P_0),\alpha_0),\dots,(g(P_n),\alpha_n))$.

Partie B : polynômes de Bernstein

Définition

Pour tout entier naturel n et tout entier k de l'intervalle $[\![0,n]\!]$, on appelle k-ième polynôme de Bernstein de degré n le polynôme

$$B_{n,k}(X)=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}.$$

V. Propriétés des polynômes de Bernstein

1. Valeurs en 0 et en 1

Démontrer que :

$$\begin{array}{rl} \forall n \in \mathbb{N}, & B_{n,0}(0) = B_{n,n}(1) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!], & B_{n,k}(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], & B_{n,k}(1) = 0. \end{array}$$

2. Positivité

Démontrer que, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $[0, 1]$, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) \geqslant 0.$$

3. Symétrie

Démontrer que, pour tout nombre réel t, tout entier naturel n et tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$,

$$B_{n,k}(t) = B_{n,n-k}(1-t).$$

4. Partition de l'unité

Démontrer que, pour tout nombre réel t et tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) = 1.$$

5. Relations de récurrence

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 et tout nombre réel t,

$$B_{n,0}(t) = (1-t)B_{n-1,0}(t),$$
$$B_{n,n}(t) = tB_{n-1,n-1}(t).$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, tout entier naturel k de $[\![1, n-1]\!]$ et tout nombre réel t,

$$B_{n,k}(t) = (1-t)B_{n-1,k}(t) + tB_{n-1,k-1}(t).$$

VI. Dérivabilité et maximum

Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul.

1. Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k}$ est dérivable et démontrer les égalités suivantes, valables pour tout nombre réel t :

$$\begin{array}{rl} & B'_{n,0}(t) = -nB_{n-1,0}(t), \\ & B'_{n,n}(t) = nB_{n-1,n-1}(t), \\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], & B'_{n,k}(t) = n\left(B_{n-1,k-1}(t) - B_{n-1,k}(t)\right). \end{array}$$

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$B'_{n,k}(0) = \begin{cases} -n \text{ si } k = 0, \\ n \text{ si } k = 1, \\ 0 \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases} \qquad B'_{n,k}(1) = \begin{cases} n \text{ si } k = n, \\ -n \text{ si } k = n-1, \\ 0 \text{ si } k \leqslant n-2. \end{cases}$$

3. Soit k dans $[\![0, n]\!]$. Démontrer que la fonction, qui à tout nombre réel t de l'intervalle $[0, 1]$ associe $B_{n,k}(t)$, admet un unique maximum, atteint en $\dfrac{k}{n}$. Donner la valeur de ce maximum.

VII. Un peu d'algèbre linéaire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et on définit les polynômes $\Phi_n(P)$ et $\Psi_n(P)$ par :

$$\Phi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1 - X)P'(X), \qquad \Psi_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X).$$

1. Démontrer que Φ_n et Ψ_n sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Démontrer que, pour tout entier k dans $[\![0, n]\!]$,

$$\Phi_n(B_{n,k})(X) = kB_{n,k}(X).$$

3. En déduire que $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Φ_n est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Démontrer que Φ_n n'est pas bijectif et que Ψ_n est bijectif.

Partie C : courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont été inventées à la fin des années 1950 par Pierre Bézier, ingénieur des usines Renault, pour tracer des profils de carrosserie à l'aide d'un logiciel. Ces courbes sont également utilisées pour concevoir les polices de caractères dites polices vectorielles, comme la police Postscript.

Définition

Soit n un entier naturel non nul et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ un $(n + 1)$-uplet de points de $\mathcal{P}$. L'ensemble des points $M(t) = \text{bar}\left((P_0, B_{n,0}(t)), (P_1, B_{n,1}(t)), \ldots, (P_n, B_{n,n}(t))\right)$, lorsque t décrit l'intervalle $[0, 1]$, s'appelle la courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$. On note cette courbe $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$. Le point $M(t)$ est le point de $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$ de paramètre t.

VIII. **1.** Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, $M(t)$ est bien défini.

2. Montrer que, pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}.$$

3. Démontrer que les points P_0 et P_n appartiennent à la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$.

IX. On considère la courbe de Bézier Γ associée aux points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ et la courbe de Bézier Γ' associée aux points de contrôle $(P_n, P_{n-1}, \cdots, P_1, P_0)$ (la liste des points de contrôle de Γ' est parcourue en sens inverse de celle des points de contrôle de Γ).
Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on pose :

$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{n,0}(t)), (P_1,\ B_{n,1}(t)), \ldots, (P_{n-1},\ B_{n,n-1}(t)), (P_n,\ B_{n,n}(t))\right),$$
$$N(t) = \text{bar}\left((P_n,\ B_{n,0}(t)), (P_{n-1},\ B_{n,1}(t)), \ldots, (P_1,\ B_{n,n-1}(t)), (P_0,\ B_{n,n}(t))\right).$$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $M(t) = N(1-t)$.

2. Que peut-on en déduire pour les courbes de Bézier Γ et Γ' ?

X. Montrer que la courbe de Bézier associée aux points de contrôle (P_0, P_1) est le segment $[P_0\,, P_1]$.

XI. Dans cette question on suppose que P_0 et P_1 sont distincts et que P_{n-1} et P_n sont distincts.
Montrer qu'un vecteur tangent en P_0 à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ est $n\overrightarrow{P_0P_1}$ et préciser un vecteur tangent en P_n à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$.

XII. Soit g une application affine du plan $\mathcal{P}$. Montrer que l'image par g de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ est une courbe de Bézier dont on précisera les points de contrôle.

XIII. Soit i_0 un entier de l'intervalle $[\![0, n]\!]$ et $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On note P'_{i_0} l'image du point P_{i_0} par la translation de vecteur $\vec{u}$. On considère la courbe de Bézier dans laquelle le point de contrôle P_{i_0} a été remplacé par P'_{i_0}, les autres étant inchangés. Pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on note $N(t)$ le point courant de cette nouvelle courbe de Bézier.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$, le vecteur $\overrightarrow{M(t)N(t)}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et que

$$\max_{t\in[0\,;1]} \|\overrightarrow{M(t)N(t)}\| = \binom{n}{i_0}\frac{i_0^{i_0}(n-i_0)^{n-i_0}}{n^n}\|\vec{u}\|.$$

Partie D : algorithme de Casteljau

XIV. Soient P_0, P_1, P_2 trois points du plan $\mathcal{P}$. Soient t un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et $M(t)$ le point de paramètre t de la courbe de Bézier de points de contrôle (P_0, P_1, P_2). On a donc :

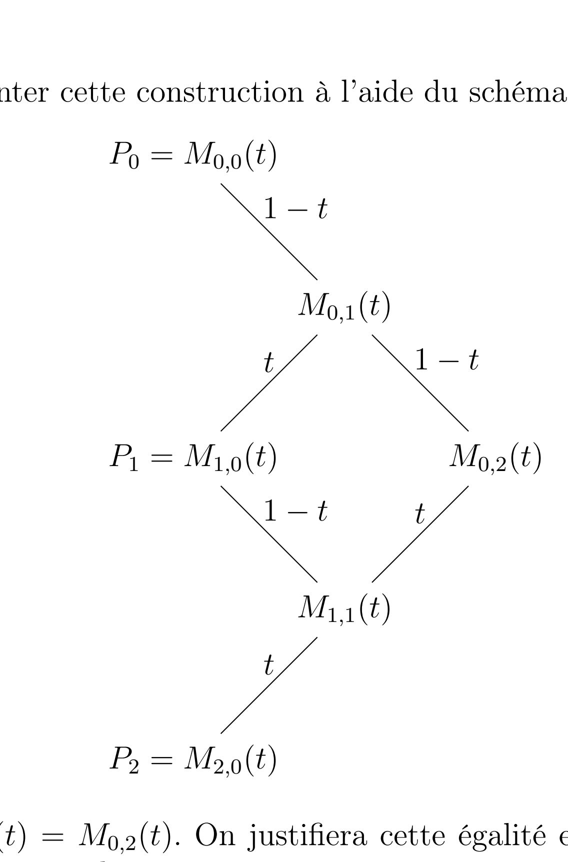
$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{2,0}(t)), (P_1,\ B_{2,1}(t)), (P_2,\ B_{2,2}(t))\right).$$

1. Expliciter $B_{2,0}(t)$, $B_{2,1}(t)$, $B_{2,2}(t)$.

2. Pour tout t un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, on note :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, 2]\!],\ M_{k,0}(t) &= P_k,\\
M_{0,1}(t) &= \text{bar}\left((M_{0,0}(t),\ 1-t), (M_{1,0}(t),\ t)\right),\\
M_{1,1}(t) &= \text{bar}\left((M_{1,0}(t),\ 1-t), (M_{2,0}(t),\ t)\right),\\
M_{0,2}(t) &= \text{bar}\left((M_{0,1}(t),\ 1-t), (M_{1,1}(t),\ t)\right).
\end{aligned}$$

On peut représenter cette construction à l'aide du schéma ci-dessous :



Montrer que $M(t) = M_{0,2}(t)$. On justifiera cette égalité en citant explicitement chacun des résultats utilisés.

XV. Soient n un entier naturel non nul, $P_0, \dots, P_n$ $n+1$ points du plan et t un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On définit par récurrence sur l les points $M_{k,l}(t)$ du plan indexés par $l \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, n-l]\!]$ de la façon suivante :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad M_{k,0}(t) = P_k,$$
$$\forall l \in [\![0, n-1]\!],\ \forall k \in [\![0, n-l-1]\!], \quad M_{k,l+1}(t) = \operatorname{bar}\left((M_{k,l}(t),\ 1-t), (M_{k+1,l}(t),\ t)\right).$$

1. Montrer que, pour tout l appartenant à $[\![0, n]\!]$ et tout k appartenant à $[\![0, n-l]\!]$,

$$M_{k,l}(t) = \operatorname{bar}\left((P_k,\ B_{l,0}(t)), (P_{k+1},\ B_{l,1}(t)), \dots, (P_{k+l},\ B_{l,l}(t))\right).$$

2. Expliquer comment ces points permettent de construire le point $M(t)$ de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \dots, P_n))$.

XVI. Dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points

$$P_0(0\,;0) \qquad P_1(1\,;1) \qquad P_2(2\,;1) \qquad P_3(2\,;0).$$

Construire géométriquement, à l'aide de l'algorithme de Casteljau, le point $M\left(\frac{1}{2}\right)$ de la courbe de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, P_2, P_3))$ de paramètre $t = \frac{1}{2}$.

Partie E : points de contrôle aux sommets d'un carré

Dans toute cette partie, A, B, C, D sont les sommets consécutifs d'un carré.
On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble $\{A, B, C, D\}$.

XVII. Isométries du carré.
On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ des isométries du plan $\mathcal{P}$ qui conservent globalement l'ensemble $\mathcal{Q}$. Parmi elles, $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ désigne l'ensemble de celles qui sont directes et $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$ l'ensemble de celles qui sont indirectes. La médiatrice du segment $[BC]$ est notée Δ et s_Δ désigne la réflexion d'axe Δ.

1. Montrer que $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ et $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ munis de la composition des applications sont des groupes. En est-il de même pour $\mathcal{I}^-(\mathcal{Q})$?
2. Montrer que l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{I}^+(\mathcal{Q}) & \to & \mathcal{I}^-(\mathcal{Q}) \\ f & \mapsto & s_\Delta \circ f \end{cases}$$

est bijective.
3. Démontrer que $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$ contient exactement 4 éléments. Donner la liste de ces éléments et la table du groupe $\mathcal{I}^+(\mathcal{Q})$.
4. Préciser les caractéristiques géométriques de chacune des isométries de $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$.

XVIII. On se propose d'étudier toutes les courbes de Bézier dont les points de contrôle sont situés aux sommets du carré $\mathcal{Q}$.

Rappel : l'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est noté $\mathfrak{S}(E)$.

1. Quel est le cardinal du groupe $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$?
2. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$, on note $\Gamma_\sigma = \Gamma((\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D)))$ la courbe de Bézier de points de contrôle $(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C), \sigma(D))$. La courbe Γ_σ est dite courbe de Bézier associée à la permutation σ. En s'appuyant sur les questions précédentes, déterminer huit permutations $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telles que Γ_σ soit isométrique à $\Gamma((A, B, C, D))$.
3. On prend pour sommets du carré les points

$$A = (-1\,;-1) \qquad B = (1\,;-1) \qquad C = (1\,;1) \qquad D = (-1\,;1)$$

et on note Γ_1 la courbe de Bézier $\Gamma((A, B, D, C))$ associée à la transposition qui échange C et D.
Pour $t \in [0, 1]$, on rappelle que le point courant de Γ_1 de paramètre t est le point

$$M(t) = \mathrm{bar}\left((A, B_{3,0}(t)), (B, B_{3,1}(t)), (D, B_{3,2}(t)), (C, B_{3,3}(t))\right)$$

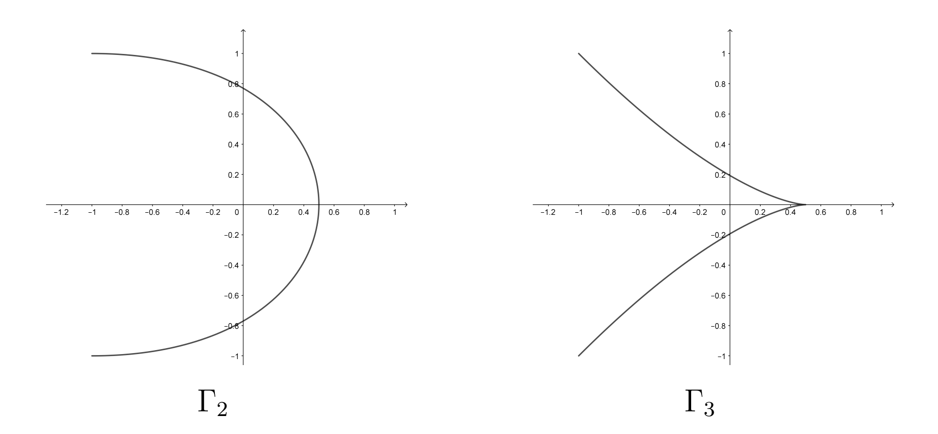
   a. Montrer que Γ_1 et $\Gamma((C, D, B, A))$ sont égales. En déduire que Γ_1 est symétrique par rapport au point O.

   b. Montrer que les coordonnées $(x(t)\,; y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont données par :

$$x(t) = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1, \qquad y(t) = -4t^3 + 6t^2 - 1.$$

c. Tracer la courbe paramétrée Γ_1.

4. On admet que les deux courbes Γ_2 et Γ_3 représentées ci-dessous sont aussi des courbes de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré $\mathcal{Q}$.



Γ_2 $\qquad\qquad$ Γ_3

Déterminer une permutation τ_2 de $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telle que $\Gamma_2 = \Gamma_{\tau_2}$ et une permutation τ_3 de $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ telle que $\Gamma_3 = \Gamma_{\tau_3}$.

5. À l'aide du résultat précédent, démontrer que Γ_2 et Γ_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ce qui est confirmé par les représentations graphiques.

6. Démontrer que toute courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les sommets du carré ABCD est isométrique à l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3.

7. En déduire que toute courbe de Bézier dont les points de contrôle sont les sommets d'un carré est semblable à l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Partie F : raccordement de courbes de Bézier

Pour construire une courbe de Bézier de forme complexe, il faut utiliser de nombreux points de contrôle. Dans ce cas, le degré des polynômes de Bernstein est élevé et la construction de la courbe de Bézier peut être lourde. Il est alors plus judicieux de raccorder des courbes de Bézier de degré peu élevé.

Soient n et m deux entiers naturels non nuls supérieurs ou égaux à 2 et soient $P_0, \ldots, P_n$ et $Q_0, \ldots, Q_m$ des points de $\mathcal{P}$. On pose :

$$M(t) = \text{bar}\left((P_0,\ B_{n,0}(t)), (P_1,\ B_{n,1}(t)), \cdots, (P_n,\ B_{n,n}(t))\right),$$
$$N(t) = \text{bar}\left((Q_0,\ B_{m,0}(t)), (Q_1,\ B_{m,1}(t)), \cdots, (Q_m,\ B_{m,m}(t))\right).$$

On suppose que P_n et Q_0 sont confondus ; les deux courbes de Bézier $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n))$ et $\Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ se raccordent donc en ce point. La courbe raccordée est notée

$$\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$$

On dit que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ est *lisse au point de raccordement* lorsque la demi-tangente à gauche à $\Gamma((P_0, \ldots, P_n))$ en P_n et la demi-tangente à droite $\Gamma((Q_0, \ldots, Q_m))$ en Q_0 ont la même direction.

XIX. Dans cette question on suppose que P_{n-1}, P_n et Q_1 sont trois points deux à deux distincts.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P_{n-1}, P_n et Q_1 pour que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ soit lisse au point de raccordement.
Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.

2. On admet que la courbe raccordée $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ peut être paramétrée par :

$$t \mapsto \overrightarrow{OR(t)} = \begin{cases} \overrightarrow{OM(2t)} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \overrightarrow{ON(2t-1)} & \text{si } \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P_{n-1}, P_n et Q_1 pour que ce paramétrage de $\Gamma((P_0, P_1, \ldots, P_n)) \vee \Gamma((Q_0, Q_1, \ldots, Q_m))$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.
Une démonstration du caractère nécessaire et suffisant de la condition donnée est attendue.

XX. On reprend la courbe Γ_1 introduite dans la question XVIII. 3.

1. On se propose de raccorder Γ_1 en C à une courbe de Bézier $\Gamma((C, E, F))$ à trois points de contrôle. Expliquer où il faut placer les points E et F pour respecter les deux contraintes suivantes :

   a. le paramétrage de la courbe raccordée introduit dans la question XIX. 2. est de classe $\mathcal{C}^1$.

   b. le point F est situé sur l'axe (Ox) et la tangente en F à la courbe a pour pente 1.

   On note alors $\Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma((C, E, F))$.

2. Donner l'allure de la courbe Γ.

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Ce problème propose d'étudier différentes moyennes de nombres positifs.

Notations
$\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Partie A : cas de deux nombres

Dans cette partie, on donne les définitions de différentes moyennes de deux nombres positifs et on présente différentes situations internes ou externes aux mathématiques les faisant intervenir.

Définitions
Étant donnés deux nombres réels a et b positifs, on appelle :

- *moyenne arithmétique* de a et b le nombre m défini par $m = \dfrac{a+b}{2}$.
- *moyenne quadratique* de a et b le nombre q défini par $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.
- *moyenne géométrique* de a et b le nombre g défini par $g = \sqrt{ab}$.

Lorsque a et b sont strictement positifs, on appelle :

- *moyenne harmonique* de a et b le nombre h défini par $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

I. Problème 1 : moyenne des notes

Lors d'un premier contrôle, un élève a obtenu la note de 9 sur 20. Un deuxième contrôle est prévu, avec le même coefficient que le premier.
Quelle est la valeur maximale de la moyenne que cet élève peut obtenir sur ces deux notes ?

II. Problème 2 : évolutions en pourcentage

Entre octobre 2018 et novembre 2018, le prix baril de pétrole brut de la mer du Nord a connu une baisse de 19%.
Entre novembre 2018 et décembre 2018, il a connu une nouvelle baisse de 12%.
Entre décembre 2018 et janvier 2019, il a connu une hausse de 4%.

1. Calculer le taux d'évolution mensuel moyen entre octobre 2018 et décembre 2018, puis entre novembre 2018 et janvier 2019.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

III. Problème 3 : fonte de deux plaques

On dispose de deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur $e = 20$ cm, mais de rayons différents $R_1 = 30$ cm et $R_2 = 50$ cm. On décide de fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e et de même rayon R.

1. Calculer R.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

IV. Problème 4 : vitesse moyenne

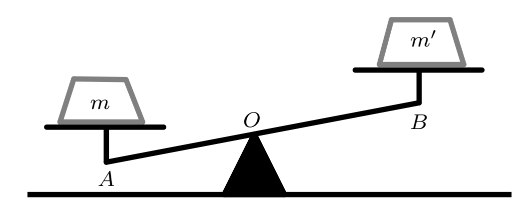
Un cycliste effectue la montée d'un col à la vitesse constante $v_1 = 20$ km/h. Une fois arrivé au col, il redescend par la même route à la vitesse constante $v_2 = 60$ km/h.

1. Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

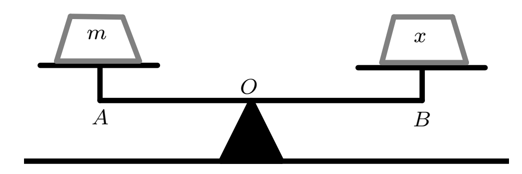
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

V. Problème 5 : double pesée

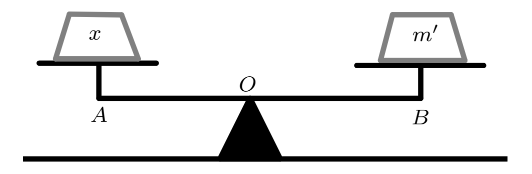
Une loi physique, la loi d'Archimède, permet d'affirmer que la balance ci-dessous est en équilibre si $m \times l = m' \times l'$ où m et m' sont les masses posées sur chaque plateau et l et l' sont respectivement les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance.



On souhaite déterminer la masse x d'un objet. On ne connaît pas les longueurs l et l' et on ne peut pas les mesurer. On dispose en revanche de diverses masses marquées. On réalise une première pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m, conformément au schéma ci-dessous.



On réalise une seconde pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m', conformément au schéma ci-dessous.

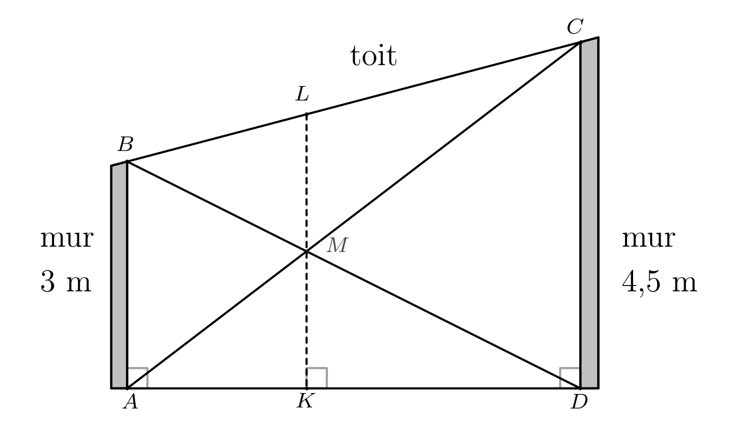


1. Exprimer x en fonction de m et m'.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

VI. Problème 6 : le problème du bricoleur

Un bricoleur désire faire des travaux dans une pièce schématisée ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



Les segments $[AC]$ et $[BD]$ représentent deux échelles posées l'une contre l'autre qui se croisent en M. On pose $a = AB = 3$ m et $b = CD = 4,5$ m. Le bricoleur mesure $1,75$ m et se pose plusieurs questions :

— Peut-il passer sous les échelles sans avoir à se baisser ?

— S'il monte s'installer en M, pourra-t-il rester debout sans atteindre le toit ou devra-t-il s'accroupir ?

— Quelle serait la hauteur d'une cloison joignant les points K et L ?

1. En appliquant le théorème de Thalès à des configurations que l'on précisera, démontrer que :

$$\frac{b}{KM} = 1 + \frac{MC}{MA},$$
$$\frac{a}{ML} = 1 + \frac{MA}{MC},$$
$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} = \frac{a}{b}.$$

2. Répondre à chacune des questions que se pose le bricoleur.

3. Exprimer KL sous la forme de l'une des moyennes de a et b.

VII. Problème 7 : hauteur d'un triangle rectangle

Dans un triangle AMB rectangle en M, on note H le pied de la hauteur issue de M. On désigne par a la longueur du segment $[HA]$ et b celle du segment $[HB]$.

1. Démontrer que les triangles AHM et MHB sont semblables et en déduire la longueur MH en fonction de a et b.

2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Partie B : toutes les moyennes sur une même figure

VIII. Construire une figure d'après la description suivante : soit $[AB]$ un segment de milieu O. Tracer Γ un demi-cercle de diamètre $[AB]$. On considère un point H du segment $[OA]$, distinct de O et de A. La perpendiculaire en H à la droite (AB) coupe le demi-cercle Γ en M. On pose $AH = a$ et $HB = b$. La figure sera complétée au fur et à mesure.

IX. Interprétation géométrique des différentes moyennes

1. Exprimer OM en fonction de a et b. La longueur OM représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
2. Justifier que $MH^2 = ab$. La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
3. Soit Γ' le demi-cercle de centre O passant par H qui coupe le segment $[OM]$. La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe Γ' en G. Exprimer OG en fonction de a et b.
4. En déduire une expression de MG en fonction de a et b. La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
5. On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$. La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K. Exprimer MK en fonction de a et b. La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b. Préciser laquelle.
6. Ordonner les quatre longueurs MO, MH, MG et MK en justifiant l'ordre.

Partie C : moyenne associée à une fonction

X. Soit F une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Démontrer que, pour tous nombres réels strictement positifs a et b, il existe un unique nombre strictement positif, noté α_F tel que
$$F(\alpha_F) = \frac{F(a) + F(b)}{2}.$$
Déterminer quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 continues et strictement monotones sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tous nombres réels a et b strictement positifs,
$$m = \alpha_{F_1}, \qquad q = \alpha_{F_2}, \qquad g = \alpha_{F_3}, \qquad h = \alpha_{F_4}.$$
2. Représenter graphiquement, sur quatre graphiques différents, les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4. Pour chaque représentation graphique, indiquer, pour deux nombres strictement positifs a et b donnés, où se situe le point α_{F_i}.

Partie D : moyennes de n nombres positifs

On généralise les définitions de la partie A au cas de n nombres réels positifs et on se propose de comparer ces différentes moyennes.

Définitions
Étant donnés un entier naturel $n \geqslant 2$ et n nombres réels $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ positifs, on appelle :

– *moyenne arithmétique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$,
– *moyenne quadratique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$,

- *moyenne géométrique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre $g = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$.
  Lorsque $a_1,\ a_2, \dots a_n$ sont strictement positifs, on appelle :
- *moyenne harmonique* de $a_1,\ a_2, \dots a_n$ le nombre strictement positif h tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

XI. Comparaison entre m et q

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels positifs.

1. Démontrer par récurrence sur n que :

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j)^2.$$

2. En déduire l'inégalité $m \leqslant q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $m = q$.

XII. Comparaison entre m et g

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x \leqslant x - 1$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1,\ a_2,\ \dots a_n$ des nombres réels strictement positifs.

a. En appliquant successivement l'inégalité précédente aux nombres $\frac{a_i}{m}$, démontrer que $g \leqslant m$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = m$.

XIII. Comparaison entre g et h

On se place dans les mêmes conditions qu'à la question **XII.2.**

1. En appliquant l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique à des nombres bien choisis, comparer g et h.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $g = h$.

Partie E : moyennes de variables aléatoires

On rappelle qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ fini suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend comme valeurs 1 et 0 avec les probabilités $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
Dans toute cette section, $X_1,\ X_2, \dots X_n$ désignent n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $F_n = \frac{1}{n} S_n$.

XIV. Calculer l'espérance et la variance de X_1.

XV. Étude des variables aléatoires S_n et F_n

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.
2. Que représente la variable S_n ? Rappeler sa loi de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable F_n.
4. Que représente la variable F_n ? Déterminer sa loi de probabilité.

XVI. 1. Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur Ω. On note $E(Y)$ son espérance. En décomposant $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\},$$

démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}.$$

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire définie Ω. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

3. On reprend les notations de l'introduction de la partie E.

a. Démontrer que, pour tout réel ϵ strictement positif,

$$P\left(|F_n - p| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

b. Expliquer comment, lorsque p est inconnu, cette inégalité permet d'en fournir une estimation. Comment s'appelle le théorème sous-jacent ?

XVII. Application

Un problème historique dû au Chevalier de Méré est rapporté dans la correspondance entre Pascal et Fermat. Grand joueur, le chevalier de Méré s'intéressait aux jeux de hasard sur lesquels il misait de l'argent. À l'issue de nombreuses parties, il avait constaté avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un six en lançant quatre fois un dé à six faces et moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés. Ce résultat lui semblait en contradiction avec l'égalité des rapports $\frac{24}{36}$ et $\frac{4}{6}$ du nombre de lancers au nombre de faces.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six à l'issue de 4 lancers d'un dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un double-six à l'issue de 24 lancers de deux dés.
3. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six en lançant quatre fois un dé à six faces ?
4. A-t-on plus ou moins d'une chance sur deux d'obtenir au moins un double-six en lançant vingt-quatre fois deux dés à six faces ?

5. Le texte ci-dessous reproduit l'extrait d'une lettre adressée par Fermat à Pascal en 1654.

« Monsieur,

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré. Il me disait donc qu'il avait trouvé faussseté dans les nombres par cette raison : si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire un double six avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé). Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes. »

Expliquer comment ce texte historique pourrait être utilisé en classe pour illustrer les réponses aux questions **3.** et **4.** Quelle est l'erreur de raisonnement commise par le Chevalier de Méré ?

6. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un six est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

7. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer au bout de combien de répétitions d'un lancer de vint-quatre dés, la fréquence d'apparition d'au moins un double-six est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

8. Quels commentaires vous inspirent ces résultats ?

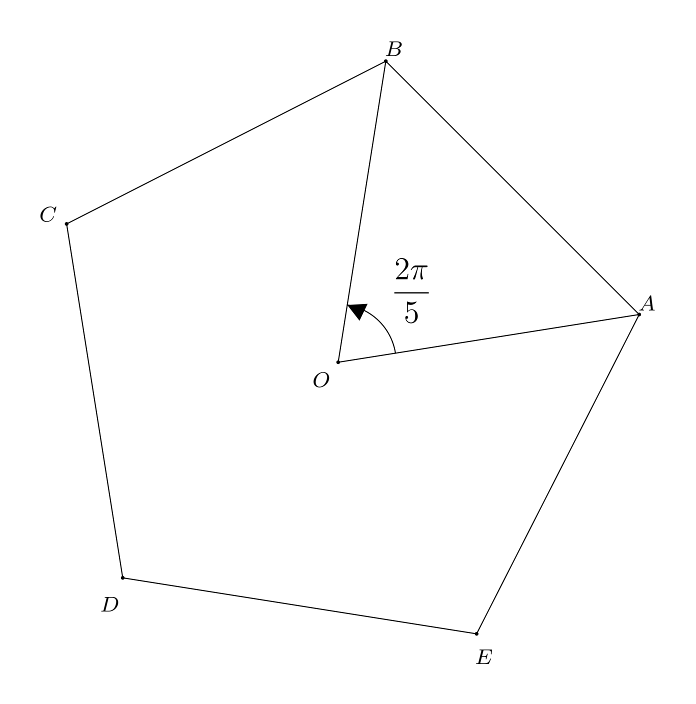
Problème n° 2

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On se place dans un plan euclidien orienté d'origine O. Si $M_1,\ M_2,\ M_3$ sont trois points distincts du plan, on note $\widehat{M_1M_2M_3}$ l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})}$. Les mesures de tous les angles considérés sont exprimées en radian. On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.

Partie A : pentagones réguliers

Les sommets $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ d'un pentagone régulier convexe de centre O sont définis par $A \neq O\ ;\ B = r(A)\ ;\ C = r(B)\ ;\ D = r(C)\ ;\ E = r(D)$.



I. Côtés, angles et diagonales d'un pentagone régulier convexe

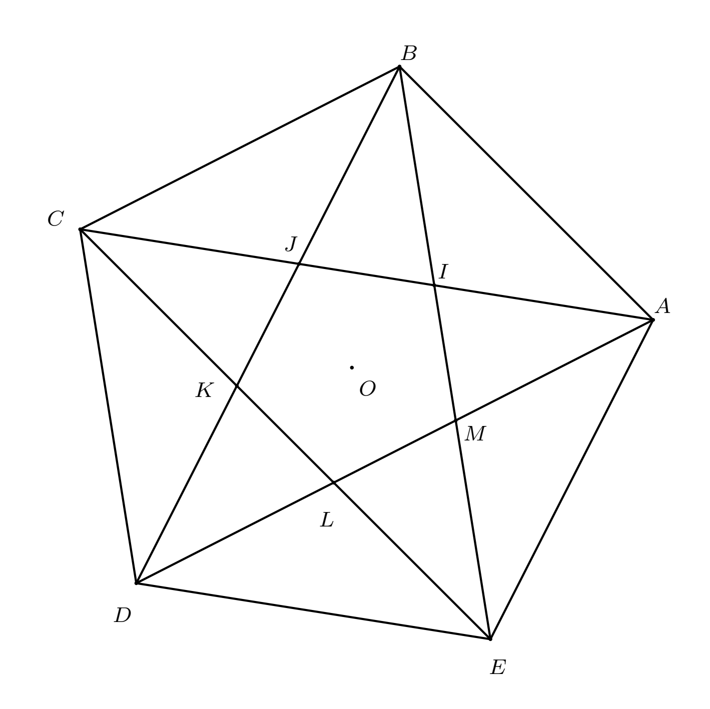
1. **a.** Démontrer que $r(E) = A$.

b. Justifier que les côtés du pentagone $ABCDE$ sont tous de même longueur et que ses angles au sommet sont tous de même mesure.

c. Démontrer que cette mesure est égale à $\dfrac{3\pi}{5}$.

On pourra utiliser les angles du triangle OAB. Toutes les justifications sont attendues.

Les segments $[AC],\ [BD],\ [CE],\ [DA]$ et $[EB]$ sont appelés *diagonales* du pentagone $ABCDE$. Les points $I,\ J,\ K,\ L,\ M$ sont définis conformément au schéma ci-dessous :



2. Démontrer que les diagonales du pentagone $ABCDE$ sont toutes de même longueur.

II. Un second pentagone régulier convexe

1. Démontrer que $r(I) = J$, puis que $IJKLM$ est un pentagone convexe régulier de centre O.
2. En déduire les mesures des angles $\widehat{IJB}$ et $\widehat{BIJ}$, puis celles de l'angle $\widehat{JBI}$.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{IBA}$ (le résultat obtenu sera démontré).
4. Démontrer que le triangle ABJ est isocèle de sommet A.
5. Écrire les trois cas d'égalité des triangles tels que vous les feriez figurer dans la trace écrite d'un élève du cycle 4.
6. Démontrer que les triangles AIM, BJI, CKJ, DLK et EML sont égaux.
7. Démontrer que les triangles ABC et BJC sont semblables.

III. Un rapport particulier

On note φ le rapport $\dfrac{AC}{AB}$.

1. Démontrer que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.
2. Calculer la valeur de φ.
3. Démontrer que φ est un nombre irrationnel.

Partie B : Fractions continues

L'objectif de cette partie est de déterminer une suite de nombre rationnels qui converge vers φ et d'en estimer la vitesse de convergence.

Si, dans l'égalité $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on substitue au φ du second membre l'expression $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on

obtient $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi}}$. En remplaçant à nouveau le φ du second membre par $1 + \dfrac{1}{\varphi}$, on obtient $\varphi = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\varphi}}}$. Ce procédé itératif suggère l'écriture de φ sous la forme

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

On se propose de formaliser cette écriture à l'aide d'une suite convergeant vers φ.
Pour cela, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

IV. Définition et premières valeurs

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est strictement positif.

2. Donner, sous forme de fractions, les valeurs de $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel.

4. Représenter sur un même graphique la fonction f, le nombre φ et les six premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

V. Convergence

1. Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la valeur de sa limite ?

2. Démontrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par φ et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par φ.

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

VI. Deux suites d'entiers

On définit deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 = q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n. \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, p_n et q_n sont des nombres entiers strictement positifs.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{p_n}{q_n}$ est la fraction irréductible égale à u_n.

4. Démontrer que les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$q_{n+1} > 2q_{n-1}.$$

6. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|u_n - \varphi| < |u_{n+1} - u_n| \leqslant 2^{-n}$.

7. Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre ε strictement positif et qui renvoie deux listes finies d'entiers $[p_0, p_1, \cdots p_{n_0}]$, $[q_0, q_1, \cdots q_{n_0}]$ telles que $\dfrac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ soit une valeur approchée de φ à ε près.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i\,;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

I. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

II. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

III. À l'aide de la relation précédente :

1. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que
$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

IV. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

V. 1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie B : le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VI. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

VII. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.

VIII. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = D_n(t).$$

2. En déduire que, si $t \in]0\,;\pi]$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

3. Calculer la valeur de $D_n(0)$.

IX. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0, \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0.

3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

X. **1.** Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t.$$

3. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t.$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XI. Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XII. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0.$$

XIII. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C : les lois géométriques

XIV. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

XV. Justifier, pour tout $x \in]-1\,;1[$, les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On citera précisément les théorèmes utilisés.

XVI. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

XVII. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Démontrer que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, vérifiant :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

XVIII. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.

1. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction des p_i.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie D : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

XIX. Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathbb{E}(Y)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

On pourra décomposer $Y(\Omega)$ sous la forme $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\}.$$

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ et une variance notée $\mathbb{V}(X)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Partie E : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.
On note Z_k le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

XXI. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

XXII. Déterminer la loi de T_1.

XXIII.

1. On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

2. En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. En déduire la loi de T_2.

4. On suppose que la collection contient 100 animaux. Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieure ou égale à 0,99.

5. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que

$$Z_k = \begin{cases} T_1 \text{ si } k = 1, \\ T_k - T_{k-1} \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

6. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de T_k en fonction des Z_i.

7. Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k.

8. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.$$

9. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

XXIV. On admet que les variables aléatoires Z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

1. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

2. En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

XXV. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

XXVI. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n \ln n\right) \leqslant 0,01.$$

CAPES externe 2021 comp. 2

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Objectif du problème
Soit a un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \tag{1}$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Partie A : une première approche

I. Un élève propose d'utiliser un tableur pour calculer les premières valeurs d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_a$, une fois les valeurs de a, u_0, u_1 et u_2 fixées. Il prépare la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	n	u_n	a	1
2	0	2		
3	1	2		
4	2	3		
5	3			
6	4			

La valeur choisie pour le paramètre a est stockée dans la cellule D1.
Quelle formule l'élève peut-il saisir dans la cellule B5 pour obtenir les valeurs de la suite en utilisant la poignée de recopie vers le bas ?

II. Démontrer que, pour tout nombre réel a, les suites constantes appartiennent à E_a.

Partie B : le cas $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où $a = 0$. On cherche l'ensemble E_0 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}. \tag{2}$$

III. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E_0.
On considère la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ e_n = 0.$$

1. Vérifier que $e \in E_0$.
2. Soit λ un nombre réel. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \lambda e_n$. Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$ et démontrer que pour cette valeur de λ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n. \tag{3}$$

3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$v_0 = \alpha + \beta, \qquad v_1 = \alpha + 2\beta.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

IV. Réciproquement, démontrer que toute suite de la forme mentionnée à la question **III. 5.** appartient à E_0.

V. **1.** Déterminer l'ensemble E_0.

2. Comment s'appelle le raisonnement mobilisé dans les questions **III.** et **IV.** qui a permis de déterminer l'ensemble E_0 ?

Partie C : le cas $a = 3$

On étudie à présent le cas où $a = 3$. On cherche l'ensemble E_3 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \tag{4}$$

Pour cela, on va utiliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3.

1. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n.$$

6. Démontrer que $x,\ y,\ z$ s'expriment chacun linéairement en fonction de $u_0,\ u_1,\ u_2$.

VII. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.

VIII. Déterminer l'ensemble E_3.

IX. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

X. Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.

XI. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

XII. Un élève utilise cet algorithme sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Il s'étonne de recevoir un message d'erreur. Comment le professeur peut-il expliquer ce message ?

Partie D : le cas général

Cette partie a pour objectif d'interpréter avec un recul de niveau première année de master les résultats des parties précédentes.

Soit a un nombre réel. On considère l'application θ définie par :

$$\theta : \begin{cases} E_a & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto \quad U_0 = \begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix} \end{cases}$$

XIII. **1.** Rappeler sans démonstration quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles.

2. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

XIV. **1.** Démontrer que θ est une application linéaire.

2. Démontrer que θ est une application bijective.

3. En déduire la dimension de l'espace-vectoriel E_a.

XV. En prenant appui sur les parties précédentes, déterminer une base de E_0 et une base de E_3.

Problème n° 2

Notations
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

La *radioactivité*, terme inventé vers 1898 par Pierre Curie, est un phénomène physique au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent spontanément avec dégagement d'énergie sous forme de divers rayonnements. Un noyau instable est dit *radioactif.*

Partie A : étude de la radioactivité d'un noyau atomique

Soit λ un nombre réel strictement positif. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et a pour densité la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Étant donné un noyau radioactif, on modélise sa durée de radioactivité, c'est-à-dire le temps (exprimé en jours) nécessaire à sa désintégration, par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle dont le paramètre réel strictement positif λ est appelé *caractéristique de radioactivité* du noyau considéré.

I. Démontrer que pour tout nombre réel positif t,

$$P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

et en déduire $P(X > t)$.

II. Interpréter chacune de ces probabilités en termes de durée de radioactivité.

III. Démontrer que, pour tous nombres réels positifs t et h,

$$P_{(X>t)}(X > t + h) = P(X > h).$$

IV. Pour $h \in \mathbb{R}^+$, interpréter $P_{(X>t)}(X > t + h)$.

V. Expliquer pourquoi on peut affirmer que la désintégration radioactive est un phénomène sans mémoire.

VI. Justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire X et déterminer sa valeur. Interpréter ce résultat en termes de durée de radioactivité.

VII. Justifier l'existence de la variance de la variable aléatoire X. Déterminer l'écart-type de la variable aléatoire X.

Partie B : étude de l'évolution d'un échantillon de noyaux radioactifs

VIII. Soit N_0 un entier naturel non nul. On dispose au départ d'un échantillon de N_0 noyaux radioactifs dont la caractéristique de radioactivité est un nombre réel strictement positif λ. On se propose d'étudier l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux radioactifs (c'est-à-dire n'étant pas encore désintégrés) présents dans l'échantillon. On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t, exprimé en jours à compter du départ.

1. Lorsque l'on dispose d'un échantillon contenant un grand nombre de noyaux, on estime habituellement la probabilité qu'un noyau de l'échantillon soit encore radioactif à l'instant t par la proportion de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t. Donner une justification mathématique de cette démarche.

2. Utiliser les résultats de la **partie A** pour établir que, selon cette estimation, $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel positif t.

3. Quelle réponse pourrait-on apporter à un élève faisant remarquer que le nombre $N(t)$ ainsi obtenu n'est pas toujours un entier naturel ?

IX. On appelle *demi-vie* d'un noyau de l'échantillon, notée τ, la durée, exprimée en jours, au bout de laquelle la moitié des noyaux de l'échantillon se sont désintégrés.

1. Exprimer la demi-vie d'un noyau radioactif en fonction de sa caractéristique de radioactivité λ.
2. L'iode 131 a une demi-vie de 8 jours. Quelle est sa caractéristique de radioactivité ?
3. Pour un noyau d'iode 131, calculer la probabilité que le temps nécessaire à sa désintégration soit compris entre 6 et 10 jours.

X. 1. Comment justifier dans le cadre des programmes du lycée que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$?

2. Justifier par un argument mathématique la proposition suivante, à la base de la loi de désintégration radioactive : « la probabilité, pour un noyau de caractéristique de radioactivité λ, radioactif à l'instant t, d'être désintégré à l'instant $t + \Delta t$ (avec Δt petit) est approximativement égale à $\lambda \Delta t$ ».

XI. 1. Démontrer que, si une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. *On pourra calculer* $\mathrm{P}(X \leqslant t)$.

2. Dans le langage Python, la fonction `random.random()` renvoie un nombre de l'intervalle $[0, 1[$ distribué selon la loi uniforme et l'instruction `math.log(x)` renvoie le logarithme népérien du nombre strictement positif `x`.
Écrire une fonction `expo(Lambda)` prenant en argument un réel `Lambda` et qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `Lambda`.

3. On considère la fonction `mystere(Lambda,t)` prenant en argument un réel `Lambda` et un réel positif `t`, définie de la manière suivante :

```
def mystere(Lambda,t):
    N0 = 1000
    N = 0
    for k in range(N0):
        X = expo(Lambda)
        if X > t:
            N = N + 1
    return N/N0
```

   a. Interpréter le résultat renvoyé par `mystere(Lambda,t)`.
   b. Écrire, à l'aide de la fonction `mystere`, une commande permettant d'obtenir une valeur approchée du résultat de la question **IX.3**.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.

I. Ensembles de nombres

1. Tout entier relatif non nul possède un inverse dans $\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

2. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

3. $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

4. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.

6. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

7. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

II. Géométrie dans le plan

8. Dans un plan muni d'un repère cartésien, $2x = 3$ est l'équation d'une droite.

9. Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonomé, on considère les points $A(1,1), B(-1,2), C(1,-1), D(4,5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

10. Dans un plan euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 20$.

III. Géométrie dans l'espace

On se place dans l'espace, muni d'un repère cartésien.

11. Si deux droites D et D' sont parallèles à un même plan P, alors D est parallèle à D'.

12. $2x + 3y = 3$ est l'équation d'une droite.

13. La droite Δ définie par le système d'équations $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

a. passe par le point A de coordonnées $(1,0,1)$,

b. a comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. est contenue dans le plan P d'équation $3x + 4y - z = 2$.

IV. Matrices

14. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ont le même rang.

15. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

16. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

17. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

V. Suites

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

18. Si elle est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.

19. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent alors $(u_n)_n$ converge.

VI. Probabilités

Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type «VRAI - FAUX».

20. La probabilité qu'il ait cinq réponses correctes est égale à $\dfrac{1}{32}$.

21. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

22. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse aucun. La note moyenne à laquelle il peut prétendre est 2,5 sur 5.

VII. Arithmétique

23. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a et b divisent c, alors ab divise c.

24. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a divise b et c, alors bc est un multiple de a.

25. $19\,x \equiv 3\,[53]$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

Problème n° 2 : convexité

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Dans ce sujet, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point.

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.
On rappelle que f est dite convexe sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad \textit{Inégalité de convexité}\ (\star).$$

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

I. Préliminaires

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I.

2. Traduire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas croissante sur I.

3. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I.

4. Traduire à l'aide de quantificateurs que f est continue en un point a de I.

II. Quelques propriétés et exemples

5. Écrire une inégalité, analogue à $(\star)$, caractérisant une fonction concave sur I.

6. Caractérisation graphique de la convexité.

- **a.** Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. Démontrer que $z \in [x;y]$ si et seulement si il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.
- **b.** Sans démonstration, illustrer l'inégalité de convexité $(\star)$ par une figure.

7. Opérations et convexité.

- **a.** Soient f et g des fonctions convexes sur I. Démontrer que $f+g$ est convexe sur I.
- **b.** Soient f une fonction convexe sur I à valeurs dans J et g une fonction convexe et croissante sur J. Démontrer que $g \circ f$ est convexe sur I.
- **c.** Sans démonstration, énoncer une propriété du même type qui permettrait de conclure que $g \circ f$ est concave.

8. Quelques exemples.

L'étude des exemples qui suivent prendra appui sur la définition de la convexité et sur les résultats précédemment démontrés.

a. Démontrer que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. On cherche à démontrer que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall t \in [0;1],\ g(t) = \ln\big(tx + (1-t)y\big) - t\ln(x) - (1-t)\ln(y).$$

i. Étudier la monotonie de la fonction g', dérivée de g, sur $[0; 1]$.

ii. Démontrer que :

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln\left(x\right) - \ln\left(y\right)}{x - y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

iii. En déduire le signe de $g'(0)$ et de $g'(1)$.

iv. Déduire des questions précédentes que g' s'annule une unique fois sur $[0; 1]$.

v. Déterminer le signe de g sur $[0; 1]$ et conclure.

9. Généralisation de l'inégalité de convexité.

Soit f une fonction convexe sur I.
Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$$

et

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

10. Deux applications.

a. À l'aide de la concavité de ln, démontrer que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

b. Démontrer que $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1, +\infty[$.
En déduire que pour tout $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

III. Inégalités des trois pentes et conséquences

Soit f une fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur I.

Pour tout $a \in I$, on considère la fonction $\Delta_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{cases}$

11. **a.** On suppose dans cette question que la fonction f est convexe sur I.
Soient $a \in I$ et $(t, u) \in (I \setminus \{a\})^2$ tel que $t < u$.

- **i.** On suppose que $t < u < a$. D'après la question **6.a.**, on sait qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ tel que $u = \lambda t + (1 - \lambda)a$.
Démontrer que $f(u) - f(a) \leqslant \lambda(f(t) - f(a))$ puis que $\Delta_a(t) \leqslant \Delta_a(u)$.
- **ii.** On admet que cette dernière inégalité reste vraie pour $a < t < u$ et pour $t < a < u$. Que peut-on en déduire pour Δ_a ?

b. On suppose dans cette question que, pour tout $a \in I$, Δ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Soient $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $\lambda \in [0; 1[$.

- **i.** Démontrer que $\Delta_x(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \Delta_x(y)$.
- **ii.** En déduire que f est convexe sur I.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Δ_a pour que f soit convexe sur I.

On suppose dans la suite de cette partie III que la fonction f est convexe sur I.

12. Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

a. En utilisant la question **11**, démontrer l'inégalité des trois pentes :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

b. Illustrer cette inégalité par une figure.

13. **a. Théorème de la limite monotone.**
Soit φ une fonction croissante sur l'intervalle $]a; b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

- **i.** Démontrer que si φ est majorée alors elle admet une limite finie à gauche en b, égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{\varphi(x)\ ;\ x \in]a, b[\}$.
- **ii.** Sans démonstration, que peut-on dire si φ est minorée ?

b. Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$.

- **i.** En appliquant le théorème de la limite monotone à Δ_b, démontrer que f est dérivable à gauche et à droite en b et que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

- **ii.** Montrer que f est continue en b.

c. Donner un exemple d'une fonction convexe et non continue sur un intervalle.

IV. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Soit f une fonction dérivable sur I. On note f' sa fonction dérivée sur I.

14. Dans cette question, on suppose f convexe sur I.

a. Montrer que pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, on a

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b),$$

et en déduire que f' est croissante.

b. Justifier que la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

15. Dans cette question, on suppose f' croissante sur I.
Soit $(x,y) \in I$ tel que $x < y$. On considère la fonction ϕ définie sur $[0;1]$ par

$$\forall t \in [0;1],\ \phi(t) = tf(x) + (1-t)f(y) - f\big(tx + (1-t)y\big).$$

a. Démontrer que ϕ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée ϕ'.

b. En utilisant le théorème des accroissements finis pour f entre x et y, démontrer qu'il existe $\gamma \in]0;1[$ tel que pour tout $t \in [0;1]$,

$$\phi'(t) = (x-y)\big(f'\left(\gamma x + (1-\gamma)y\right) - f'\left(tx + (1-t)y\right)\big).$$

c. En déduire les variations de ϕ.

d. En déduire que la fonction f est convexe sur I.

16. Démontrer qu'une fonction f deux fois dérivable sur I est convexe sur I si et seulement si f" est positive sur I.

V. Différentes inégalités

17. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

On définit la fonction $\psi : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & yf\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases}$

a. Démontrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$, on a

$$\psi(x_1, y_1) + \psi(x_2, y_2) \leqslant \psi(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k) \leqslant \psi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \qquad (\star\star).$$

18. Application.
Soient $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Dans cette question, $f : t \longmapsto t^{\frac{1}{p}}$

a. Démontrer que f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$.
En utilisant $(\star\star)$, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

CAPES externe 2022 comp. 2

Le sujet est composé :

- *des questions posées au candidat (pages 1 à 3) ;*
- *du dossier sur lequel portent ces questions (pages 4 à 9).*

La formulation des questions permet d'identifier la forme attendue de la réponse : annotation de copie, énoncé d'exercice, corrigé d'exercice, démonstration, etc. Lorsqu'une analyse ou un argumentaire est demandé, la réponse doit être précise et concise.

Partie 1 : fractions

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 1 du dossier (pages 4 et 5).

I - Analyse d'erreurs

1. *Élève 1* : indiquer l'annotation que l'on pourrait inscrire sur sa copie pour l'aider à prendre conscience de son erreur.

2. *Élève 2* : comment est-il arrivé à ce résultat ? Comment l'amener à critiquer son résultat pour instiller un doute ?

3. Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées *distracteurs*, correspondent en général à des erreurs courantes. Préciser l'origine possible des distracteurs de l'exercice 1.

II – Éléments d'une séquence d'enseignement

1. À partir de la droite graduée de l'exercice 2, proposer quatre questions à l'attention des élèves permettant d'évaluer la mobilisation des compétences suivantes du programme :
   - utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) ;
   - passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

2. Lorsqu'on introduit la multiplication des entiers à l'école primaire, il est courant de prendre appui sur des schémas. En se plaçant dans un cas simple, proposer de même une figure permettant d'expliquer l'origine de la propriété qui donne le produit de deux fractions.

3. En s'appuyant sur la définition du quotient $\frac{a}{b}$ donnée dans le dossier, établir l'égalité suivante, vraie pour tous les nombres a, b, c et d avec b et d non nuls.
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
   On veillera à justifier chacune des étapes de la démonstration.

4. Dans le document ressource il est indiqué que la définition du quotient $\frac{a}{b}$ comme étant le nombre dont le produit par b vaut a n'est pas *d'accès facile*. Préciser la nature des difficultés que pourrait susciter cette définition chez des élèves et proposer brièvement une façon de la rendre accessible.

5. L’extrait d’ouvrage historique (la Disme) est un document parfois utilisé pour passer de l’écriture d’une fraction comme somme de fractions décimales à son écriture à virgule.
   5.1. Comment définir le sens des mots *primes* et *quartes* dans l’extrait ?
   5.2. Comment expliquer à des élèves que 7 ①12 ② et 8 ①2 ② « valent autant » ?
   5.3. L’écriture « 5 ⓪ 7 ② » risque de constituer un obstacle pour les élèves lors du passage à l’écriture à virgule. Expliciter cet obstacle et proposer une autre écriture susceptible de l'éviter.
   5.4. Donner deux arguments en faveur de l’exploitation de ce document historique avec une classe de collège.

III - Exercice à prise d’initiative

1. Dans la formulation de l’exercice 3, le mot « moins » apparaît avec deux sens différents. Proposer une modification de l’énoncé pour éviter le risque de confusion.

2. Résoudre l’exercice 3.

3. Un enseignant choisit de faire travailler les élèves par groupes de quatre sur cet exercice. Proposer deux modalités d’animation qu’il peut mettre en place pour que chaque élève s’engage dans cette recherche et bénéficie du travail en groupe.

4. Proposer deux critères permettant d’apprécier la réussite partielle d’un élève dans la résolution de cet exercice.

Partie 2 : géométrie repérée

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 2 du dossier (pages 6 à 9).

IV – Éléments d'une séquence d'enseignement

1. Après avoir défini la colinéarité de deux vecteurs, un enseignant propose les questions flash de l'exercice 4. Préciser pour chaque question de cet exercice les objectifs visés.

2. La définition du déterminant proposée dans le manuel nécessite-t-elle de se placer dans un repère orthonormé ? Justifier la réponse.

3.
   3.1. Rédiger une démonstration de la propriété « deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul ».

   3.2. Parmi les raisonnements suivants, identifier ceux qui sont utilisés dans la réponse à la question 3.1, en précisant à quel endroit de la démonstration ils interviennent : raisonnement par l'absurde, disjonction de cas, double implication, équivalence, raisonnement par contre-exemple.

4. En utilisant le déterminant de deux vecteurs, établir la forme générale d'une équation de droite comme cela pourrait être présenté devant une classe de seconde.

V - Analyse de ressources

1. Quelle est la notion commune mobilisée dans les trois exercices 5, 6 et 7 ?
   Comment qualifier chacun de ces exercices par rapport aux types de tâches mentionnés dans le préambule du programme de seconde ?

2.
   2.1. En quoi les exercices 8 et 9 peuvent-ils permettre aux élèves de comprendre l'utilité d'une démonstration mathématique ?
   2.2. Proposer, en justifiant ce choix, une autre situation qui réponde à cet objectif.
   2.3. Rédiger, à l'attention d'une classe de seconde, une correction de l'exercice 8 qui mobilise l'outil vectoriel.

3. Un enseignant envisage de proposer l'exercice 9 à une classe de terminale.
   En anticipant sur les initiatives à prendre et sur ce qui pourrait faire obstacle à sa résolution, proposer deux « coups de pouce » susceptibles d'aider des élèves qui en ont besoin.

VI - Analyse des productions d'élèves

1.
   1.1 Analyser les productions des groupes d'élèves pour l'exercice 10, au regard de la compétence *raisonner*.
   1.2 Quelles annotations pourraient figurer sur ces productions entre deux séances de travail, pour développer chez ces élèves la compétence *raisonner* ?

2. Proposer deux corrections différentes de l'exercice 10 telles qu'elles pourraient figurer dans un cahier d'élève de seconde. L'une des deux devra s'appuyer sur la production du groupe 1 et l'autre sur celle du groupe 2.

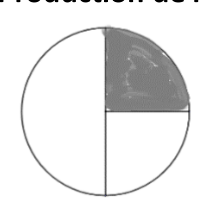
Dossier : partie 1

Document ressource

Extrait du document ressource du cycle 4 « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions » (MENJS, Eduscol, mars 2016)

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a. Le professeur prendra conscience que cette définition n'est pas d'accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.
La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture *sept quarts* ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).
(…)
Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes (…). Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7.

Productions d'élèves

Énoncé Quel dessin ferais-tu pour expliquer ce qu'est $\frac{1}{3}$? **Production de l'élève 1** 	*Énoncé* Calculer $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ **Production de l'élève 2** $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

Exercice 1 (QCM)

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

- ☐ 0,4
- ☐ 1,25
- ☐ 1,4
- ☐ 0,25

Exercice 2 (énoncé incomplet)



Extrait d'ouvrage historique

En 1585, le hollandais Simon Stévin publie La Theinde, traduit en français sous le titre La Disme. Le succès de cet écrit à travers toute l'Europe conduira à l'utilisation de l'écriture à virgule.

> Comme 3 ① 7 ② 5 ③9 ④, c'est à dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces 9 Quartes et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire que selon cette définition les dits nombres font $\frac{3}{10}\frac{7}{100}\frac{5}{1000}\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8 ⓪9 ①3 ② 9 ③ , valent $8\frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{9}{1000}$, et ensemble $8\frac{939}{1000}$ et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombres rompus, aussi que le nombre de multitudes des signes, excepté ⓪, n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7 ①12 ② mais en leur lieu 8 ①2 ② , car ils valent autant.

Exercice 3

D'après le document ressource du cycle 4, Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions (MENJS, Eduscol, mars 2016)

Les $\frac{2}{5}$ d'un groupe de personnes ont au moins 50 ans et $\frac{1}{3}$ a moins de 20 ans.

Est-il possible que l'âge moyen de ce groupe soit de 40 ans ?

Dossier : partie 2

Programme

Extrait du programme de mathématiques de seconde générale et technologique (arrêté du 17 janvier 2019, MENE1901631A)

Diversité de l'activité de l'élève

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d'acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques.
La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, etc.

Document ressource

Extrait du document ressource « Les compétences mathématiques au lycée » (MENJS, Eduscol, novembre 2013)

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Document ressource

Extrait de « La République à l'école » (MENJS, septembre 2021)

L'activité de l'élève dans la classe de mathématiques

Délivrer un savoir achevé et parfait ne suffit pas. Il s'agit que les élèves soient mis en activité de recherche, dans le cadre de la résolution des problèmes. C'est l'occasion pour eux d'explorer toute la richesse de la démarche mathématique : comprendre la question, la reformuler, se l'approprier ; émettre des hypothèses, faire des conjectures ; essayer, tâtonner ; définir des pistes de recherche ; accepter de se tromper ; échanger avec autrui, développer des arguments, écouter ceux des autres ; coopérer pour surmonter une difficulté ; constater qu'un problème peut admettre plusieurs solutions, qu'il peut y avoir plusieurs façons de démontrer un résultat. L'élève se convainc que vérifier une propriété sur quelques cas ne permet pas d'affirmer qu'elle est vraie dans tous les cas ; qu'une conjecture ayant toute l'apparence de la vérité peut s'avérer fausse ; ou qu'un résultat étonnant devient incontestable, car démontré.

Extraits d'un manuel

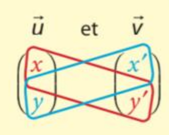
Math'x 2de, édition Didier

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* l'un est le produit de l'autre par un réel.

Propriété et définition

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une base du plan.





- Le nombre $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* leur déterminant est nul.

Propriété et définition (équation cartésienne)

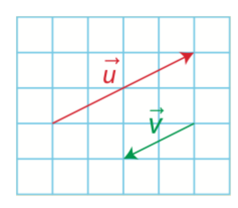
Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Un point appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Énoncés d'exercices

Exercice 4 (questions flash)

D'après le manuel Hyperbole seconde, édition Nathan et le document ressource « Raisonnement et démonstration 2DE » (MENJS, Eduscol, août 2019)



Question 1 : *Trois camarades affirment*

Jade : « $\vec{u} = -2\vec{v}$ »

Amanda : « $\vec{u} = 2\vec{v}$ »

Wallid : « $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$ »

Qui a raison ?

Question 2 : *Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?*

Question 3 : *Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}13\\21\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?*

Dans les trois exercices suivants, le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 5

Extrait du manuel Maths 2de Magnard

68 **1.** Calculer les déterminants des vecteurs suivants.
2. Dire s'ils sont colinéaires.
3. S'ils sont colinéaires, trouver un coefficient de colinéarité.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\4,5\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4,5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$

e) $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

Exercice 6

Extrait du manuel Maths 2de Magnard

72 Dans chaque cas, dire si le point C appartient à la droite (AB).

a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)
b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)
c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

Exercice 7

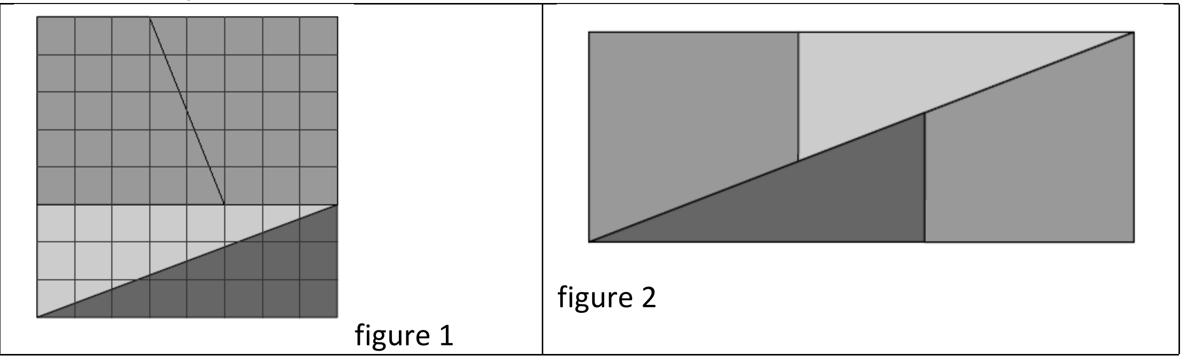
Extrait du manuel Maths 2de Magnard

104 Coordonnée inconnue

On donne les points A(6 ; 3), B(–3 ; 0), C(5 ; 4) et D(–1 ; 1).

1. Montrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.
2. Les points B, C et D sont-ils alignés ?
3. Déterminer y pour que le point M(25 ; y) appartienne à la droite (AB).

Exercice 8 : le paradoxe de Lewis Caroll

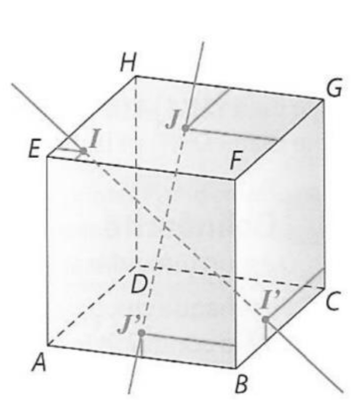

figure 1 figure 2

En découpant le carré de la figure 1 et en repositionnant les morceaux on obtient la figure 2. Comparer les aires de ces deux figures. Que constate-ton ? Comment justifier ce constat ?

Exercice 9 : les aiguilles

Extrait du manuel Déclic édition Hachette

Un cube d'arête 8 cm est traversé par deux aiguilles suivant les droites (II') et (JJ').
I et J sont situés sur la face $EFGH$.
I est à 1 cm de (EH) et (EF).
J est à 4 cm de (HG) et (FG).
J' est un point de la face $ABFE$ situé à 1 cm de (AB) et à 4 cm de (BF). I' est un point de la face $BCGF$ situé à 1 cm de (BC) et à 5 cm de (CG).
Les deux aiguilles se touchent-elles ?



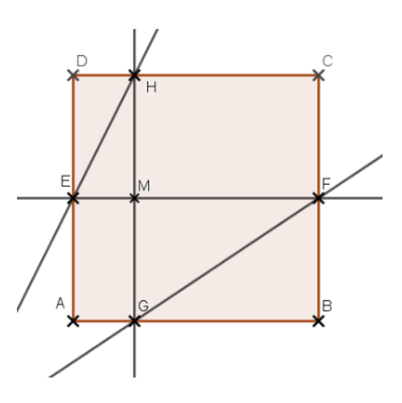
Exercice 10

ABCD est un carré. On place un point M à l'intérieur du carré.

La droite parallèle à (AB) passant par M, coupe [AD] en E et [BC] en F.

La droite parallèle à (AD) passant par M coupe [AB] en G et [CD] en H.

Où se situent les points M pour que les droites (EH) et (FG) soient parallèles ?



Productions de groupes d'élèves (exercice 10)

Groupe 1

D'après le théorème de Thalès

$(EH)//\ (FG)$ *soit* $\dfrac{EM}{MF} = \dfrac{HM}{MG} = \dfrac{EH}{GF}$ *donc* $EM \times MG = MF \times HM$

$EM \times MG \rightarrow aire\ du\ rectangle\ EMGA$

$MF \times HM \rightarrow aire\ du\ rectangle\ HCFM$

$(EH)//(FG)\ si\ l'aire\ de\ EMGA = l'aire\ de\ HCFM$

$Si\ M \in (DB)\ alors\ EMGA\ est\ le\ symétrique\ de\ HCFM\ par\ rapport$ à (DB).

$Donc\ si\ M \in (DB)\ alors\ (EH)//(FG)$.

Groupe 2

On veut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{GF}$*sont colinéaires pour cela il faudra mettre en place un repère orthonormé pour déterminer les coordonnées des vecteurs ensuite il faudra faire un produit en croix.*

On suppose que le point M devra appartenir à la diagonale DB pour que les segments [EH] et [GF] soient parallèles.

$E(0; y)\quad G(x; 0)\quad H(x; 1)\quad F(1; y)$

$\overrightarrow{EH}(x_H - x_E; y_H - y_E)$

$\overrightarrow{EH}(x - 0; 1 - y)$

$\overrightarrow{EH}(x; 1 - y)$

$\overrightarrow{GF}(x_F - x_G; y_F - y_G)$

$\overrightarrow{GF}(1 - x; y - 0)$

$\overrightarrow{GF}(1 - x; y)$

$xy = (1 - x)(1 - y)$

$xy = 1 - y - x + xy$

$y = -x + 1$

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

I. Analyse

Ici $[a;b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si, et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$.

2. Soit une fonction f définie et continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans $[a;b]$.
L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

3. Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, alors pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) > g(x)$.

4. Si la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est nulle, alors la fonction est nulle sur cet intervalle.

5. Les solutions de l'équation différentielle $y" - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions

$$x \longmapsto k\exp(2x) + 1$$

où k désigne un nombre réel quelconque.

6. La négation de l'assertion « toute suite réelle majorée converge » est « il existe des suites réelles minorées qui ne convergent pas ».

7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} - ... + \dfrac{1}{(-7)^n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement plus grand que 1.

8. Un cycliste parcourt 40 km la semaine 0. Il décide que, chaque semaine, il parcourra 5km de plus que la distance parcourue lors de la semaine précédente.
La fonction *seuil* présentée ci-dessous, écrite en langage Python, permet de déterminer le numéro de la semaine où la distance totale qu'il aura parcourue sera supérieure à un nombre n donné.

```
def seuil(n) :
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n :
        k=k+1
        S=S+u+5
    return k
```

II. Géométrie

9. Étant donnés trois points A, B et C du plan, la contraposée de l'assertion

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Longrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

est

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.$$

10. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\, . \, | \, . \,)$ et d'une norme associée notée $|| \, . \, ||$. Soient x et y dans P tels que $||x|| = ||y||$.
Les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

11. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\, . \, | \, . \,)$.
Pour tous vecteurs x, y et z de P, on a $(x|z) = (y|z) \Longrightarrow x = y$.

12. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points $A(-4, 1), B(3, 0)$ et $C(5, 4)$.
La médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x + y = 3$.

13. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 2| = |z + 1|$ est réduit au point d'affixe $\frac{1}{2}$.

14. Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.

15. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan P d'équation $x - 2y + 3z = -5$ et la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ sont perpendiculaires.

III. Matrices

16. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et 2 colonnes.

17. Si A et B sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes telles que $AB = 0$, alors A ou B n'est pas inversible.

IV. Pourcentages

18. En 2019, le prix du tabac a augmenté de 12%, en 2020 de 16%, en 2021 de 7%.
L'augmentation du prix du tabac de 2019 à 2021 a été de 35%.

19. Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50% des exercices qu'elle a traités et Boris 90% des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20% des exercices qu'elle a traités et Boris 40% des exercices qu'il a traités.
Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

V. Arithmétique

20. Soit n un entier naturel.
$n^3 - n$ est pair.

21. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n.
Si $x^2 \equiv 9\ [n]$ alors $x \equiv 3\ [n]$ ou $x \equiv -3\ [n]$.

VI. Dénombrement

22. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est égal à 100.

23. Étant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 3, on trace dans un plan n droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.
Le nombre de triangles ainsi obtenus est égal à $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

VII. Probabilités

24. On choisit un numéro entre 1 et 6. On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention du numéro choisi.
La probabilité de devoir effectuer au moins 3 lancers pour obtenir le numéro choisi est $\dfrac{5^2}{6^2}$.

25. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Problème n° 2 : équations fonctionnelles

I. Quelques résultats classiques

Dans cette partie, qui traite de points élémentaires, un soin particulier devra être apporté à la rigueur et à la précision des arguments donnés.

1. Dérivabilité

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un élément a de I.

a. Donner une définition de l'assertion «f est dérivable en a».

b. On suppose que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. Démontrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en a, qui est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + g(x)$$

où g est une fonction négligeable devant $x \mapsto x - a$ en a. *On pourra considérer la fonction* $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ *si* $x \neq a$ *et* $\varepsilon(a) = 0$.

c. **i.** Démontrer que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

ii. Donner, sans démonstration, un contre-exemple pour l'assertion réciproque.

d. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f et g sont dérivables en a alors fg l'est aussi. Expliciter $(fg)'(a)$.

e. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a. Expliciter $(g \circ f)'(a)$.

2. La fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1, on la note ln.

Ainsi ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

L'objectif de cette question 2. est de démontrer des propriétés élémentaires du logarithme népérien, dont la plupart figurent au programme de Terminale. À ce stade, ces propriétés sont supposées ne pas encore avoir été établies. De même, la fonction exponentielle de base e *n'est pas supposée avoir été introduite et ne pourra être utilisée.*

a. Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
On pourra considérer, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé, la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

c. Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g(xy) = g(x) + g(y)$. Soit g une telle fonction.

i. Déterminer $g(1)$.

ii. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$.

iii. En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g'(y) = \dfrac{c}{y}$.

iv. Déterminer l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle $g(xy) = g(x) + g(y)$.

d. Démontrer que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Soit $A \in \mathbb{R}$. Après avoir vérifié qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant \dfrac{A}{\ln 2}$, démontrer que, pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant 2^n$, $\ln(x) \geqslant A$.

f. Expliciter les limites de ln en $+\infty$ et en 0^+.

g. Démontrer que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

h. Démontrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 14ab$$

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.

3. Résultats préliminaires

Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $f(0)$.

b. Démontrer que f est une fonction impaire.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, $f(nx) = nf(x)$.

d. En déduire que, pour tout nombre rationnel r et tout nombre réel x, $f(rx) = rf(x)$.

e. Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$.

4. Première méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.

Déduire de la question **3.** qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = ax$. Conclure.

5. Seconde méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.

a. Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_0^1 f(x + t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

d. Conclure.

III. Restriction des hypothèses

On pourra, pour les questions suivantes, utiliser les résultats démontrés dans la question **3.** L'objectif de cette partie est d'examiner l'effet sur la conclusion de la partie **II** de trois restrictions de l'hypothèse de continuité des fonctions additives sur $\mathbb{R}$.

6. Continuité en un point

Soient un nombre réel x_0 et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

a. Démontrer que f est continue en 0.

b. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Conclure.

7. Monotonie

Soit une fonction f additive et monotone sur $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un nombre réel.

a. Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

i. pour tout entier naturel n, $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$.

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

b. Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

c. Conclure.

8. Encadrement

Soient deux nombres réels α et β, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha;\beta]$.
Soit x un nombre réel.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un nombre rationnel r_n tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.

b. On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a|\,|nx - r_n|\,.$$

c. Conclure.

IV. D'autres équations fonctionnelles

9. Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Soit f une telle fonction.

a. Démontrer que $f(0) = 1$ ou que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

b. On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

i. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f(x) > 0$.

ii. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \ln(f(x))$. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

iii. En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \exp(ax)$ (où exp désigne la fonction exponentielle réciproque de la fonction logarithme népérien étudiée dans la partie **I**) et conclure.

10. Équation fonctionnelle de Jensen

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Soit f une telle fonction.

a. Exprimer la propriété vérifiée par les fonctions qui satisfont l'équation fonctionnelle de Jensen, à l'aide d'une phrase faisant intervenir la notion de *moyenne*.

b. Démontrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

c. On pose $f(0) = b$. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = f(x) - b$.
Déterminer l'équation fonctionnelle vérifiée par g et résoudre l'équation fonctionnelle de Jensen.

11. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f\left(\frac{x^2+16}{2x}\right).$$

Soit f une telle fonction.

a. On considère les fonctions

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+16}{2x} \end{array}$$

et

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) - x \end{array}$$

i. Dresser le tableau des variations de g, déterminer $g(4)$ et préciser les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

ii. Étudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. **i.** Soient $x \in [4; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 16}{2u_n}$.
À l'aide de la question **a**, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

ii. En déduire que, pour tout $x \in [4; +\infty[$, on a $f(x) = f(4)$.

c. Procéder de manière analogue à la question **b** pour démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; 4[$, on a $f(x) = f(4)$.

d. Conclure.

CAPES externe 2023 comp. 2

Le sujet est composé :

- *des questions posées au candidat (pages 1 à 4) ;*
- *du dossier sur lequel portent ces questions (pages 5 à 14).*

Partie 1 : aires

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 1 du dossier (pages 5 à 10).

La notion d'aire au collège

I - Analyse de ressources

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 3 en travail de groupes à une classe de sixième.

1. Proposer une figure de même aire et de périmètre plus grand que le modèle, puis une figure de même périmètre et d'aire plus grande que le modèle.
2. Quels apprentissages peut viser l'enseignant en proposant cette situation ?
3. Donner deux arguments justifiant l'intérêt pédagogique d'organiser un travail en groupes autour de cette situation.
4. À partir des figures proposées en annexe 4, quelle question pourrait être posée pour réinvestir l'un des apprentissages de l'exercice de l'annexe 3 ?

II - Analyse d'une production d'élève

Un enseignant propose l'exercice de l'annexe 5 à une classe de troisième.

1. Analyser en termes de réussites et d'erreurs la solution proposée par l'élève de l'annexe 5 bis.
2. En prenant appui sur la démarche de cet élève, rédiger une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait être donnée à copier par les élèves dans leur cahier.

La notion d'aire au lycée

III - Analyse d'erreur d'élève

Le QCM de l'annexe 7 est proposé à des élèves de terminale *spécialité mathématiques*.

1. Écrire les énoncés mathématiques sur le calcul intégral (définition, propriété) que doivent mobiliser les élèves pour répondre correctement.
2. Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées *distracteurs*, correspondent en général à des erreurs courantes. Indiquer la bonne réponse et analyser les distracteurs de l'annexe 7.
3. Une majorité d'élèves a répondu « d. » à la question posée. Proposer un exercice qui pourrait permettre de remédier à l'erreur commise.

IV - Démonstration d'un théorème du cours

Proposer une démonstration du théorème mentionné dans l'annexe 6, telle qu'elle pourrait être rédigée devant une classe de terminale *spécialité mathématiques*. On se placera dans le cas d'une fonction positive, continue et croissante sur l'intervalle d'étude.

V - Mobilisation de compétences mathématiques

Le problème « d'Archimède » (annexe 8) est proposé à une classe de terminale *spécialité mathématiques*.

1. Analyser la production de l'élève (annexe 8 bis) au regard des compétences *raisonner* et *calculer*.
2. L'élève a choisi l'axe de symétrie de la parabole comme axe des ordonnées du repère. Quel autre repère aurait-il pu également choisir pour faciliter les calculs ? Rédiger une correction de l'exercice dans ce nouveau repère.

VI – Algorithmique et programmation

1. Pour utiliser la méthode de Monte-Carlo (annexe 9) en classe terminale *spécialité mathématiques*, un enseignant hésite entre les deux situations de l'annexe 10. Quelle situation paraît la plus pertinente à ce niveau ?
2. Expliquer le résultat obtenu et analyser les erreurs commises par l'élève (annexe 11 bis) dans le programme qu'il produit en réponse à l'exercice d'application de la méthode de Monte Carlo donné en annexe 11.
3. Proposer une correction de ce programme.
4. Que représente, dans un autre domaine des mathématiques, le résultat obtenu à l'exercice de l'annexe 11 ?

Partie 2 : initiation au raisonnement

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 2 du dossier (pages 11 à 14).

VII - Éléments d'une séquence d'enseignement

1. Les figures de l'annexe 13, numérotées 1, 2 et 3 ont été obtenues en codant des quadrilatères ABCD pour illustrer les propriétés d'un parallélogramme.
   a. Énoncer la propriété illustrée par chacune de ces figures, sous la forme : « Si un quadrilatère est un parallélogramme alors … ».
   b. Quand dit-on qu'une propriété vérifiée par un quadrilatère *caractérise* un parallélogramme ? On parle alors de *propriété caractéristique*.
   c. Donner une propriété vérifiée par tout parallélogramme qui pourrait convaincre des élèves que toutes les propriétés ne sont pas caractéristiques.
   d. La propriété codée par la figure 3 est-elle caractéristique d'un parallélogramme ? Justifier.
   e. Quels peuvent être les avantages et les inconvénients de présenter une propriété à l'aide d'une figure codée plutôt qu'avec son énoncé ?

2. Dans l'extrait de manuel « Méthode 2 » de l'annexe 13, sont décrites des méthodes pour « tracer un parallélogramme connaissant trois de ses sommets ».
   a. Donner les étapes d'un autre programme de construction permettant d'obtenir un parallélogramme à partir de trois points et à l'aide de ses diagonales. Expliciter la propriété qui permet de justifier cette construction.
   b. En appliquant ce programme de construction, un élève pense que cette méthode ne convient pas parce qu'il obtient un rectangle. Quelles explications peuvent lui être apportées ?

VIII – Classification d'exercices

Pour chacun des quatre exercices donnés dans l'annexe 14, en indiquant sommairement la démarche qui peut être envisagée pour répondre à la question posée préciser le type de raisonnement mis en œuvre.

La résolution de ces exercices n'est pas demandée.

IX - Analyse de productions d'élèves

L'annexe 15 bis donne les réponses d'élèves de plusieurs classes à un même exercice donné en annexe 15.

1. Élève 1
   a. Expliquer l'intérêt de la multiplication par 4.
   b. Rédiger un raisonnement justifiant l'affirmation « donc logiquement, x doit finir par 2 » tel qu'il pourrait figurer dans les cahiers des élèves d'une classe de troisième.
   c. Proposer une autre rédaction de ce raisonnement tel qu'il pourrait figurer dans les cahiers des élèves d'une classe de terminale option « mathématiques expertes ».

2. Élève 2
   a. Comment aider l'élève à trouver ce qui ne convient pas dans son programme ?
   b. Réécrire le programme proposé par l'élève pour qu'il donne les solutions de l'équation $5{,}25\ x + 2{,}5\ y = 338$.

3. Élève 3
   a. Analyser l'erreur de l'élève.
   b. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation diophantienne $21\ x + 10\ y = 1352$.

X - Analyse de ressources

1. Exercice de l'annexe 16
   a. Quel type de démarche cet exercice permet-il de mettre en défaut ?
   b. Quel travail sur les quantificateurs peut être conduit à partir de cet exercice ?
   c. Donner des arguments en faveur d'un temps de travail en groupes pour traiter cet exercice en classe.

2. Exercice de l'annexe 17
   a. Rappeler les différentes étapes d'un raisonnement par récurrence.
   b. Comment pourrait-on expliquer à une classe de Terminale la mise en défaut du raisonnement pour démontrer l'hérédité lorsque $k = 1$?.

Dossier : Partie 1

Annexe 1 : programme de mathématiques du cycle 3 (*BO n°31 du 30 juillet 2020, extrait*)

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle

Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

Longueur et périmètre

Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure (par exemple en utilisant une ficelle, ou en reportant les longueurs des côtés d'un polygone sur un segment de droite avec un compas).

- Notion de longueur : cas particulier du périmètre.
- Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération.

Calculer le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés.

Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule.

- Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle.
- Formule de la longueur d'un cercle.

Aires

Comparer des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure, par superposition ou par découpage et recollement.

Différencier périmètre et aire d'une figure.

Estimer la mesure d'une aire et l'exprimer dans une unité adaptée.

Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule.

- Unités usuelles d'aire et leurs relations : multiples et sous-multiples du m^2.
- Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.

Annexe 2 : les compétences mathématiques au lycée (*Éduscol, novembre 2013, extrait*)

Calculer

Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel).

Mettre en œuvre des algorithmes simples.

Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations, effectuer des simplifications.

Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

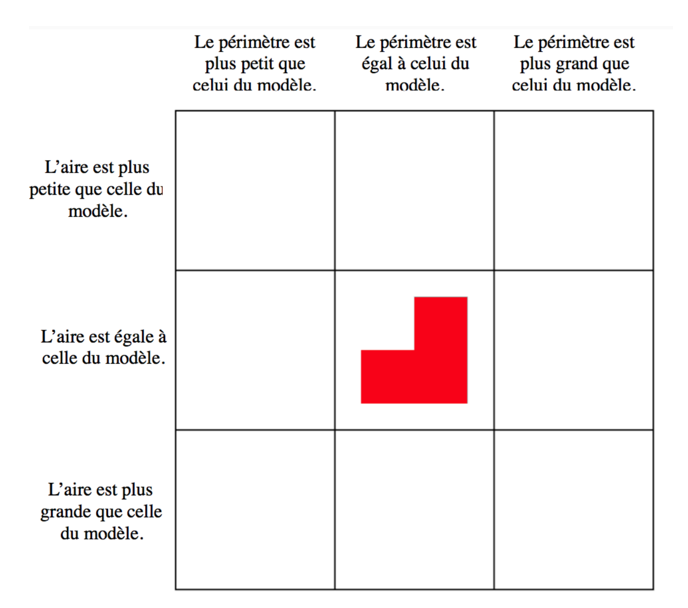
Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

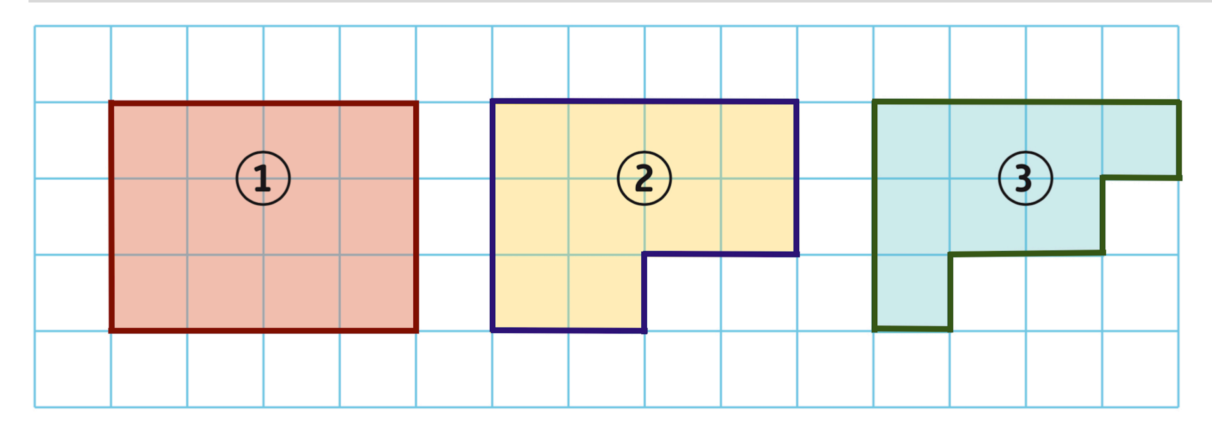
Annexe 3 : exercice sur les notions d'aire et de périmètre (*d'après l'IREM des Pays de la Loire*)

Inventer des figures à partir de la figure présente au centre du tableau et les positionner dans les cases correspondantes. Chercher à compléter toutes les cases.



	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus petite que celle du modèle.			
L'aire est égale à celle du modèle.			
L'aire est plus grande que celle du modèle.			

Annexe 4 : figures (*extrait du manuel Delta Mathématiques 6e, Magnard*)

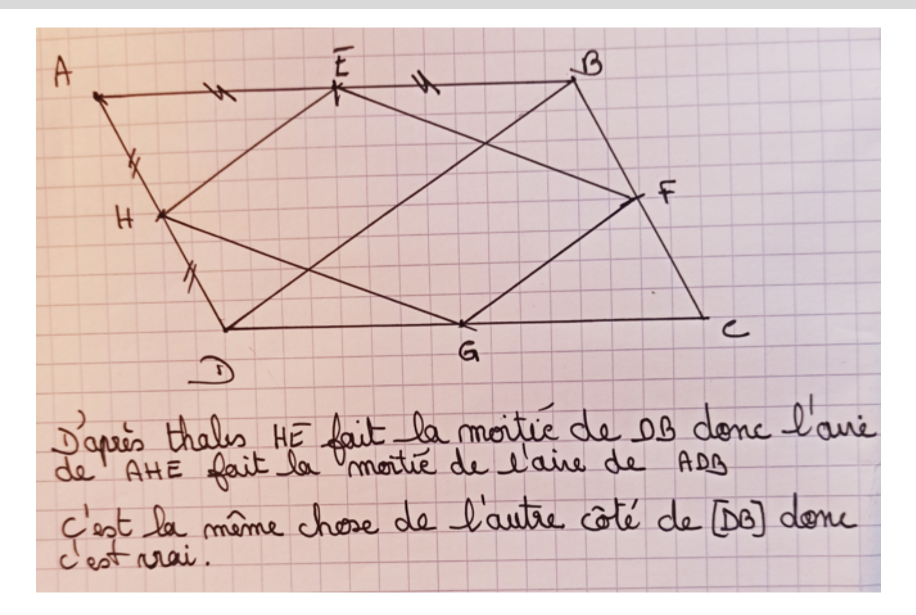


Annexe 5 : exercice

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

On considère un quadrilatère ABCD et les points E, F, G et H les milieux respectifs de ses côtés. L'aire du quadrilatère EFGH est égale à la moitié de l'aire du quadrilatère ABCD.

Annexe 5 bis : production d'un élève



Annexe 6 : programme de la spécialité mathématiques de terminale (*extrait*)

- **Calcul intégral**

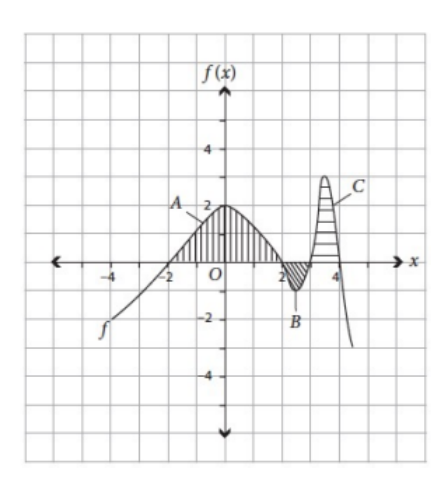
La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$.

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a,b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a,b]$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Annexe 7 : QCM (*extrait de l'évaluation TIMMS 2008*)



Pour les aires entre le graphe de f et l'axe des abscisses, l'aire de A est 4,8 unités, l'aire de B est de 0,8 unités et l'aire de C est de 2 unités.

Quelle est la valeur de $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

a. 5,6
b. 6,0
c. 6,8
d. 7,6

Annexe 8 : problème des arches paraboliques

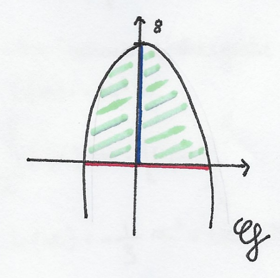
Archimède affirmait que l'aire de la surface sous une arche parabolique est égale aux deux tiers de la base multipliée par la hauteur de l'arche.

Qu'en pensez-vous ?

Annexe 8 bis : production d'un élève

• Afin de représenter le problème d'Archimède, nous prenons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est semblable à une arche parabolique.

$f(x) = -x^2 + 8$



hauteur
base
aire

• On calcule Δ afin de trouver les racines :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= -4 \times (-1) \times 8$

$= 32$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{32}}{-2} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{32}}{-2} = -2\sqrt{2}$

• La base est donc $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

• Selon archimède : aire $= \frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur

donc $\frac{2}{3}$ base $\times$ hauteur $= \frac{2}{3} 4\sqrt{2} \times 8 = \frac{64\sqrt{2}}{3}$

• On calcul l'intégrale pour vérifier l'affirmation d'Archimède

$f(x) = -x^2 + 8$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 8x + k$ vérification : $F'(x) = -\frac{3}{3}x^2 + 8 = -x^2 + 8 = f(x)$

$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx = F(2\sqrt{2}) - F(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 + 8(2\sqrt{2}) - \left(-\frac{1}{3}(-2\sqrt{2})^3 + 8(-2\sqrt{2})\right)$

$= \frac{64\sqrt{2}}{3}$

Conclusion: nous retombons bien sur le même résultat, donc Archimede avait raison : l'aire de la surface d'une arche parabolique est égale au deux tiers de la base fois la hauteur.

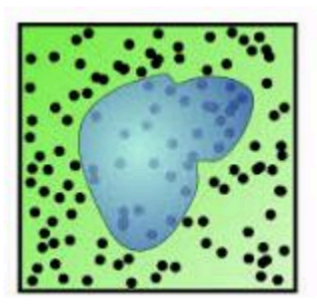
Annexe 9 : la méthode de Monte-Carlo (*Éduscol, Suites, exponentielle, probabilités, page 21)*

Une méthode originale

La méthode de Monte-Carlo est une méthode originale qui s'appuie sur le hasard pour estimer une aire.

Stanisław Ulam et John von Neumann l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. Une surface inconnue peut être estimée de la façon suivante :

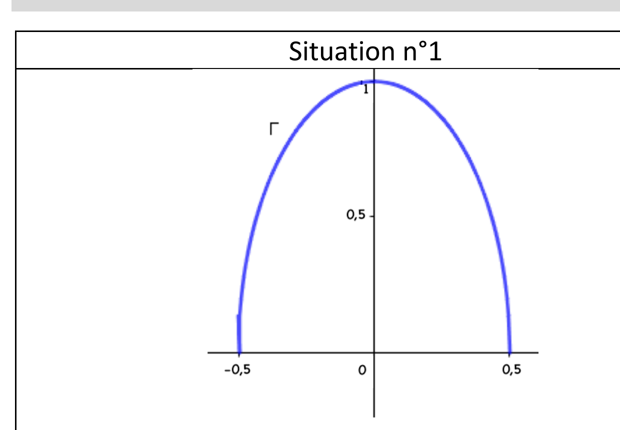
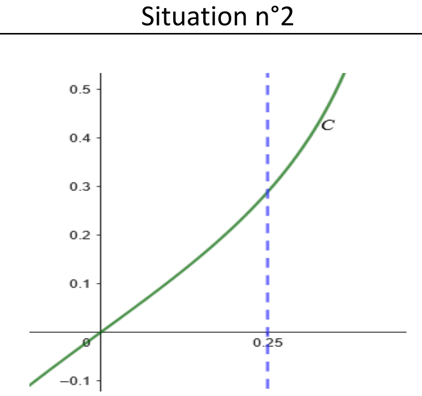
On l'englobe dans un domaine plus large dont l'aire est facile à calculer, un rectangle par exemple.



On génère des points au hasard dans ce rectangle.

On estime l'aire de la surface inconnue par la proportion de points à l'intérieur de la surface multipliée par l'aire du rectangle.

Annexe 10 : calculs d'aire

Situation n°1	Situation n°2
 La courbe Γ représente la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe Γ et l'axe des abscisses.	 La courbe *C* représente la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$. Déterminer l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe *C*, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=\frac{1}{4}$

Annexe 11 : application de la méthode de Monte-Carlo

Écrire un algorithme qui renvoie une approximation de l'aire de la portion du plan comprise entre :

- la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

- l'axe des ordonnées ;
- l'axe des abscisses ;
- la droite d'équation $x=1$.

Annexe 11 bis : production d’un élève

```
from math import*
from random import*

def f(x):
    y=exp(-x*x/2)/sqrt(2*pi)
    return y

def aire(n):
    compteur=0
    for k in range(n):
        x=random()
        y=random()
    if y<f(x):
        compteur=compteur+1
    return compteur
```

On obtient :

```
> aire(1000000)
1
```

Dossier : Partie 2

Annexe 12 : raisonnement et démonstration (*Éduscol, août 2019, extrait*)

Du collège à la seconde

En classe de seconde, l'enseignement des mathématiques doit, en tenant compte de la diversité du public et de l'hétérogénéité des niveaux, viser trois objectifs :

- poursuivre la formation du citoyen commencée dans le cadre du socle commun ;
- assurer une solide formation aux futurs scientifiques sans décourager les autres ;
- éclairer les élèves sur l'intérêt de faire des mathématiques en première pour servir un grand nombre de projets d'études.

Le travail sur le raisonnement et la démonstration en seconde s'appuie sur celui effectué au cycle 4, tel qu'il est décrit dans le préambule du programme de mathématiques : « La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées […]. Le programme du cycle 4 permet d'initier l'élève à différents types de raisonnement, le raisonnement déductif, mais aussi le raisonnement par disjonction de cas ou par l'absurde. La démonstration, forme d'argumentation propre aux mathématiques, vient compléter celles développées dans d'autres disciplines et contribue fortement à la formation de la personne et du citoyen (domaine 3 du socle) ».

(…)

Raisonner pour chercher, raisonner pour démontrer

Dans une phase de recherche, le raisonnement inclut des formes heuristiques telles que l'essai-erreur, la recherche de conjectures par :

- raisonnement inductif : conjecturer une proposition générale à partir de la vérification de cas particuliers ;
- raisonnement abductif : sachant que A implique B et voulant démontrer B, on peut être amené à conjecturer A.

Mentionnons aussi la preuve sur un exemple générique (démonstration sur un cas susceptible d'être adaptée au cas général), la « preuve sans mots » (justification sur une figure peu ou non commentée).

Dans une phase de démonstration, on utilise le raisonnement déductif qui peut se présenter sous diverses formes : raisonnement par implication, par équivalence, par l'absurde, par disjonction de cas, etc. La mise en forme de la démonstration s'appuie sur les compétences « raisonner » et « communiquer ».

Le raisonnement intervient ainsi dans ces activités diverses (chercher et conjecturer, affirmer et démontrer) dont la valeur et l'intérêt sont à mettre en évidence. Il importe aussi que l'élève apprenne à les distinguer clairement : une conjecture n'est pas un théorème, un raisonnement inductif n'est pas déductif, A implique B ne signifie pas B implique A (…).

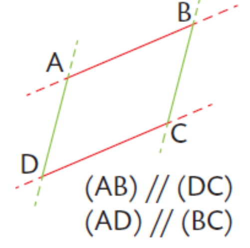
Ainsi, l'élève doit être encouragé à chercher, à juger avec lucidité les résultats qu'il obtient, à reconnaître comme tel un argument incomplet, à éviter les affirmations non étayées.

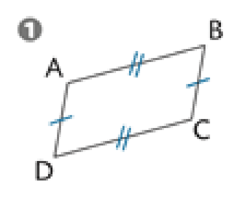
Annexe 13 : extraits d'un manuel (*Maths Monde, cycle 4, édition Didier, pages 293 et 294*)

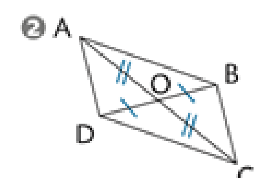
Parallélogramme

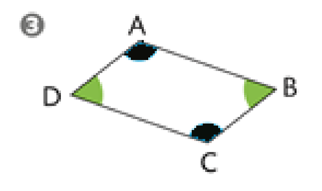
DÉFINITION

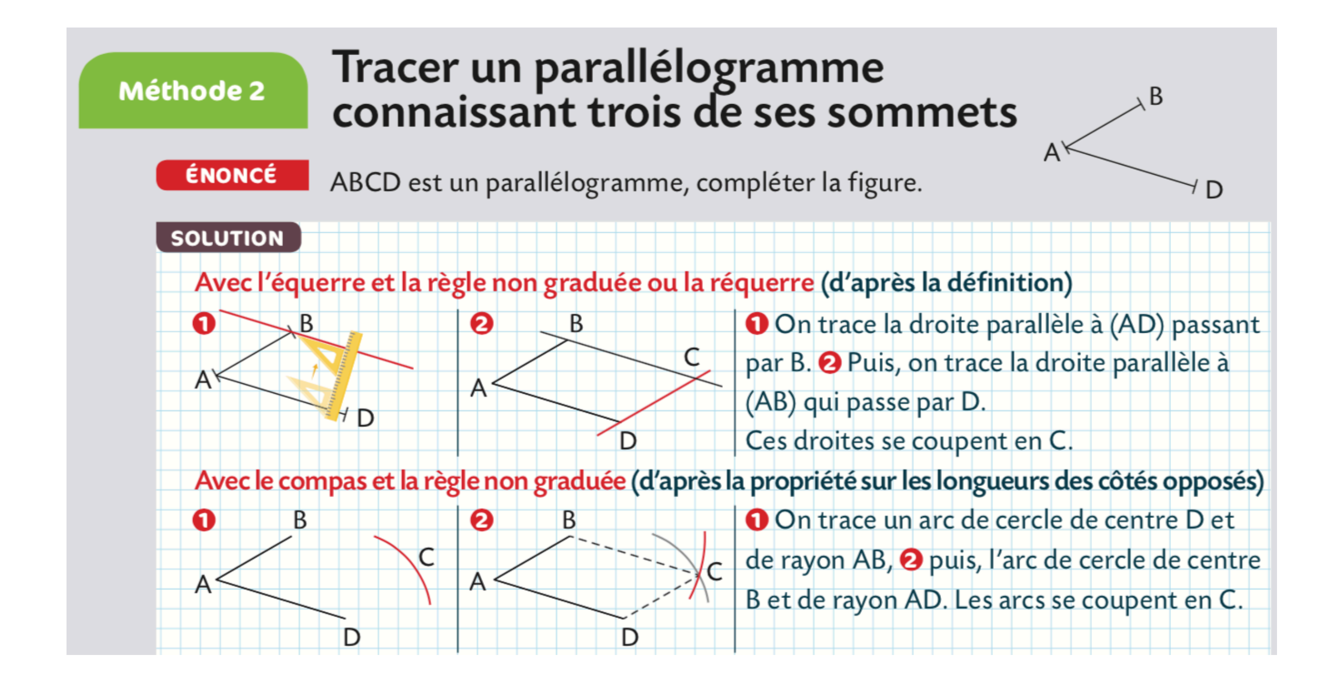
Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.











Méthode 2

Tracer un parallélogramme connaissant trois de ses sommets

ÉNONCÉ ABCD est un parallélogramme, compléter la figure.

SOLUTION

Avec l'équerre et la règle non graduée ou la réquerre (d'après la définition)

❶ On trace la droite parallèle à (AD) passant par B. ❷ Puis, on trace la droite parallèle à (AB) qui passe par D.
Ces droites se coupent en C.

Avec le compas et la règle non graduée (d'après la propriété sur les longueurs des côtés opposés)

❶ On trace un arc de cercle de centre D et de rayon AB, ❷ puis, l'arc de cercle de centre B et de rayon AD. Les arcs se coupent en C.

Annexe 14 : énoncés d'exercices

Exercice 1

Soient *a* et *b* deux réels positifs.

A-t-on $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$?

Exercice 2

Soient *a* et *b* deux réels positifs.

Le produit des racines carrées de *a* et *b* est-il égal à la racine carrée du produit de *a* et *b* ?

Exercice 3 :

n désigne un entier relatif. On considère le nombre A = $n\,(n^2+5)$.

Démontrer que A est divisible par 3.

Exercice 4

Soit *n* un entier naturel non nul.

Démontrer que $(1 + 2 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

Annexe 15 : exercice

Énoncé : Un pépiniériste propose à la vente des plants de mufliers à 5,25 € le plant et des plants de jacinthes à 2,50 € le plant. À la fin de la journée, sa recette est de 338 €.

Déterminer le nombre total de plants vendus.

Annexe 15 bis : productions d'élèves

Élève 1 (classe de troisième)

J'appelle x le nombres de mufliers et y le nombre de jacinthes vendus.

Et en multipliant par 4 ça donne 21 x +10 y = 1352.
Donc logiquement, x doit finir par 2.

J'ai essayé et j'ai trouvé que le pépiniériste a vendu 42 mufliers et 47 jacinthes.

Élève 2 (classe de seconde)

J'ai écrit le programme suivant avec x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes

```
x=0
y=0
while 5.25*x+2.5*y != 338 :
    x=x+1
    y=y+1
print (x,y)
```

Je ne trouve pas de solution ce qui n'est pas logique d'après l'énoncé.

Élève 3 (option mathématiques expertes de terminale)

Je note x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes. Je dois donc résoudre l'équation diophantienne 5,25 x + 2,5 y = 338.
J'écris l'algorithme d'Euclide : 5,25= 2*2,5+0,25

2,5 = 0,25 * 10 + 0

J'essaie de résoudre l'équation diophantienne mais je n'arrive pas à appliquer l'égalité de Bézout parce que je n'ai pas un 1 dans l'algorithme d'Euclide.

Annexe 16 : exercice

Préciser si la proposition suivante est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Proposition : pour tout entier n, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

Annexe 17 : exercice (Barbazo Terminale spécialité mathématiques, Hachette, page 27)

On considère le raisonnement suivant.

On note $P(n)$ la propriété suivante : « Si une urne contient n boules, alors les n boules sont de la même couleur. »
Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- Pour $n = 1$: $P(1)$ est vraie car il n'y a qu'une boule.
- Supposons que, pour un entier naturel non nul k fixé, $P(k)$ est vraie. Prenons une urne qui contient $(k + 1)$ boules. On enlève une boule ; il en reste alors k qui, par hypothèse de récurrence, sont de la même couleur. On enlève une autre boule et on remet la première : il y a encore k boules dans l'urne qui sont donc, par hypothèse de récurrence, toutes de la même couleur. La première boule enlevée a donc la même couleur que les autres. Donc les $(k + 1)$ boules de l'urne sont de même couleur ; donc $P(k + 1)$ est vraie.
- Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Quelle erreur de raisonnement commet-on ?
